Enrico Borghi

PARTICELLE INDISTINGUIBILI

Consideriamo, in Meccanica classica, due particelle che si muovono nello spazio.
Le due particelle sono identiche, cioè sono dotate di uguale massa e uguale carica.
Entrambe possiedono, in un istante iniziale di tempo t_0, propri e distinti valori iniziali di posizione e momento che, se sono note le forze agenti sulle particelle, permettono di determinare la traiettoria di ciascuna.
Se in un istante successivo $t > t_0$ effettuiamo una osservazione misurando la posizione o il momento di una delle particelle potremo verificare quale è la traiettoria che in quell'istante fornisce un valore uguale a quello misurato e sapremo così quale è, cioè quali valori iniziali ha, la traiettoria della particella che abbiamo osservato.
Abbiamo così potuto, all'atto della misura, distinguere una particella dall'altra identica alla prima servendoci dell'equazione della sua traiettoria.
Conclusione: in Meccanica classica particelle identiche sono *distinguibili.*

In Meccanica quantistica particelle identiche, cioè dotate di uguali massa, carica e spin, sono *indistinguibili.*
Infatti non è possibile assegnare a ciascuna di esse distinti valori iniziali di posizione e momento perché, per il Principio di Indeterminazione, le particelle sono caratterizzate o dalla sola posizione o dal solo momento cosicché la loro traiettoria rimane imprecisata.
Segue da questa imprecisione che, una volta misurata, ad esempio, la posizione di una delle due particelle identiche, non è possibile sapere a quale delle due particelle tale posizione è riferita.
Questo fatto ha conseguenze di grande importanza.
Per rendercene conto iniziamo col considerare un sistema meccanico costituito da due particelle quantistiche qualisivoglia (identiche o non identiche) che indichiamo con 1 e 2, non interagenti, e introduciamo i simboli $\overline{q}^{(1)}$ e $\overline{q}^{(2)}$ ciascuno rappresentativo dell'insieme delle coordinate $\overline{\mathcal{R}}^{(k)}, k = 1, 2$ e della componente $S_z^{(k)}$ dello spin lungo una direzione, convenzionalmente l'asse z, delle particelle 1 e 2.
Se gli hamiltoniani delle due particelle sono $\mathcal{H}^{(1)}$ e $\mathcal{H}^{(2)}$, allora l'equazione agli autovalori per l'energia di ogni particella, che supponiamo dotata di spettro discreto, è

$$\mathcal{H}^{(k)}\psi_i^{(k)}(\overline{q}^{(k)}) = \mathcal{E}_i^{(k)}\psi_i^{(k)}(\overline{q}^{(k)}) \quad ; \quad \overline{q}^{(k)} \equiv \overline{\mathcal{R}}^{(k)}, S_z^{(k)} \quad ; \quad k = 1, 2 \tag{1}$$

dove $\mathcal{E}_i^{(k)}$ è l'i-esimo autovalore dell'energia della k-esima particella e $\psi_i^{(k)}$ è l'autofunzione ad esso appartenente.
L'equazione agli autovalori per il sistema delle due particelle, poiché non vi è interazione, è espressa da

$$(\mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)})\psi(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}) = \mathcal{E}\psi(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}) \tag{2}$$

ovvero

$$\mathcal{H}^{(1)}\psi(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}) + \mathcal{H}^{(2)}\psi(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}) = \mathcal{E}\psi(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}) \tag{3}$$

Per determinare la soluzione $\psi(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)})$ di questa equazione poniamo:

$$\psi(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}) = \psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})$$

Sostituendo nella (3) si trova:

$$\mathcal{H}^{(1)}\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)}) + \mathcal{H}^{(2)}\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)}) = \mathcal{E}\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})$$

da cui

$$\frac{\mathcal{H}^{(1)}\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})}{\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})} + \frac{\mathcal{H}^{(2)}\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})}{\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})} = \mathcal{E}$$

Ora osserviamo che $\mathcal{H}^{(1)}$ opera solamente su $\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})$ e $\mathcal{H}^{(2)}$ opera solamente su $\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})$ perciò si può scrivere

$$\frac{\{\mathcal{H}^{(1)}\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\}\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})}{\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})} + \frac{\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\{\mathcal{H}^{(2)}\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})\}}{\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})} = \mathcal{E}$$

da cui, semplificando

$$\frac{\mathcal{H}^{(1)}\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})}{\psi^{(1)}(\overline{q}^{(1)})} + \frac{\mathcal{H}^{(2)}\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})}{\psi^{(2)}(\overline{q}^{(2)})} = \mathcal{E}$$

Notiamo che ciascun termine a membro sinistro dipende da una sola variabile perciò deve necessariamente essere una costante che indichiamo con $\mathcal{E}^{(k)}, k = 1, 2$ cosicché

$$\frac{\mathcal{H}^{(k)}\psi^{(k)}(\overline{q}^{(k)})}{\psi^{(k)}(\overline{q}^{(k)})} = \mathcal{E}^{(k)} \quad ; \quad k = 1, 2$$

ovvero

$$\mathcal{H}^{(k)}\psi^{(k)}(\overline{q}^{(k)}) = \mathcal{E}^{(k)}\psi^{(k)}(\overline{q}^{(k)}) \quad ; \quad k = 1, 2$$

e possiamo così notare che $\psi^{(k)}$ è del tipo espresso dalla (1), dove occorre sostituire il numero quantico i con i numeri quantici n e l associati rispettivamente alle particelle 1 e 2 perciò le autofunzioni della (2) sono

$$\psi_{nl}(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}) = \psi_n^{(1)}(\overline{q}^{(1)})\psi_l^{(2)}(\overline{q}^{(2)}) \quad ; \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_n^{(1)} + \mathcal{E}_l^{(2)} \tag{4}$$

Se le due particelle quantistiche sono identiche, e quindi, per quanto si è detto all'inizio di questo studio, sono indistinguibili, le autofunzioni dell'energia sono ancora espresse dalla (4), dove però ora occorre eliminare da $\psi_n^{(1)}$ l'indice (1) e da $\psi_l^{(2)}$ l'indice (2):

$$\psi_{nl}(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}) = \psi_n(\overline{q}^{(1)})\psi_l(\overline{q}^{(2)}) \quad ; \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_n + \mathcal{E}_l \tag{5}$$

Infatti non si può dire che la particella 1 ha coordinate $\overline{q}^{(1)}$ e la particella 2 ha coordinate $\overline{q}^{(2)}$, ma solo che "una" particella ha coordinate $\overline{q}^{(1)}$ e "l'altra" ha coordinate $\overline{q}^{(2)}$, come correttamente la (5) esprime.

Prendiamo ora in considerazione la *equazione stazionaria di Schrödinger* che qui riscriviamo:

$$\mathcal{H}u_i(\overline{\mathcal{R}}) = \mathcal{E}_i u_i(\overline{\mathcal{R}}) \quad ; \quad \overline{\mathcal{R}} \equiv x, y, z \tag{6}$$

Si tratta di una equazione agli autovalori. Le energie $\mathcal{E}_i$ sono gli autovalori di $\mathcal{H}$, che supponiamo discreti, e le $u_i(\overline{\mathcal{R}})$ sono le autofunzioni ad essi appartenenti.
Una volta risolta la (6) si ha a disposizione quanto serve per ottenere la soluzione $\psi\,(\overline{\mathcal{R}}, t)$ della *equazione di Schrödinger*

$$\psi\,(\overline{\mathcal{R}}, t) = \sum_i c_i u_i(\overline{\mathcal{R}}) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_i t} \tag{7}$$

Riscriviamo la (7) adattandola al caso delle particelle 1 e 2:

$$\psi(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}, t) = \sum_{n,l} c_{nl} \psi_{nl} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}t} = \sum_{n,l} c_{nl} \psi_n(\overline{q}^{(1)}) \psi_l(\overline{q}^{(2)}) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}t} \quad ; \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_n + \mathcal{E}_l \qquad (8)$$

Ora osserviamo che se scambiamo $\overline{q}^{(1)}$ con $\overline{q}^{(2)}$ la $\psi_{nl} = \psi_n(\overline{q}^{(1)})\psi_l(\overline{q}(^{(2)})$ cambia, mentre l'autovalore $\mathcal{E}$ rimane invariato. Ciò significa che vi è degenerazione, perché a un medesimo autovalore corrispondono due autofunzioni. Si tratta di una *degenerazione di scambio.*
In generale, per N particelle, a un medesimo autovalore corrispondono tante autofunzioni quante sono le possibili permutazioni delle particelle, cioè $N!$.
La funzione d'onda del sistema (omettendo, per semplificare la scrittura, di evidenziare la dipendenza dal tempo) è quindi espressa da

$$\psi(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}, \ldots, \overline{q}^{(N)}) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_p c_p \psi_p \qquad (9)$$

dove ψ_p è l'autofunzione ottenuta effettuando la p-esima permutazione e $1/\sqrt{N!}$ è un fattore di normalizzazione.
La degenerazione può essere rimossa osservando che, in virtù della indistinguibilità delle particelle, il passaggio da una pernutazione all'altra può mutare la ψ al più per un fattore di fase.
Se indichiamo con P l'operatore di permutazione, si dovrà avere

$$\mathsf{P}\psi(\overline{q}^{(1)}, \ldots, \overline{q}^{(N)}) = e^{i\alpha} \psi(\overline{q}^{(1)}, \ldots, \overline{q}^{(N)})$$

Scambiando ancora una volta si deve tornare allo stato iniziale cioè

$$\mathsf{PP}\psi = \psi$$

ma $\mathsf{PP}\psi = \mathsf{P}e^{i\alpha}\psi = e^{i\alpha}\mathsf{P}\psi = e^{i\alpha}e^{i\alpha}\psi$, perciò $e^{i2\alpha}\psi = \psi$ e quindi

$$e^{i2\alpha} = 1$$

da cui

$$e^{i\alpha} = \pm 1$$

Si può così concludere affermando che:
per qualsivoglia sistema di particelle identiche non possono esservi che due tipi di funzioni d'onda: una, detta "simmetrica", si ottiene ponendo nella (9) tutte le c_p uguali a 1:

$$\psi_s(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}, \ldots, \overline{q}^{(N)} t) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_p \psi_p \qquad (10)$$

l'altra, detta "antisimmetrica", si ottiene attribuendo a c_p il valore $+1$ alle permutazioni pari e il valore -1 alle permutazioni dispari:

$$\psi_a(\overline{q}^{(1)}, \overline{q}^{(2)}, \ldots, \overline{q}^{(N)}) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_p (-1)^p \psi_p \qquad (11)$$

Ad esempio, se la ψ è quella espressa dalla (5) si ha:

$$\psi_s(\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2!}}\left\{\psi_n(\overline{q}^{(1)})\psi_l(\overline{q}^{(2)}) + \psi_n(\overline{q}^{(2)})\psi_l(\overline{q}^{(1)})\right\} \tag{12}$$

$$\psi_a(\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2!}}\left\{\psi_n(\overline{q}^{(1)})\psi_l(\overline{q}^{(2)}) - \psi_n(\overline{q}^{(2)})\psi_l(\overline{q}^{(1)})\right\} \tag{13}$$

Si vede così che se scambiamo la particella (1) con la (2) nella ψ_s, questa rimane invariata, cioè si comporta simmetricamente a seguito dello scambio, mentre se lo scambio avviene nella ψ_a, questa cambia segno:

$$\begin{aligned}\psi_a(\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}) &= \frac{1}{\sqrt{2!}}\left\{\psi_n(\overline{q}^{(2)})\psi_l(\overline{q}^{(1)}) - \psi_n(\overline{q}^{(1)})\psi_l(\overline{q}^{(2)})\right\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2!}}\left\{\psi_n(\overline{q}^{(1)})\psi_l(\overline{q}^{(2)}) - \psi_n(\overline{q}^{(2)})\psi_l(\overline{q}^{(1)})\right\}\end{aligned}$$

cioè si comporta antisimmetricamente a seguito dello scambio.

Le particelle dotate di funzione d'onda simmetrica sono dette *bosoni*; le particelle dotate di funzione d'onda antisimmetrica sono dette *fermioni*.
Sperimentalmente si verifica che le particelle dotate di spin intero, come i fotoni, sono bosoni, mentre le particelle dotate di spin semiintero, come gli elettroni o i protoni o i neutroni, sono fermioni.

Ora osserviamo che se nella (12) poniamo $l = n$, cioè se assegnamo alle due particelle identiche il medesimo stato quantico, otteniamo

$$\psi_s'(\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}) = \frac{2}{\sqrt{2!}}\psi_n(\overline{q}^{(1)})\psi_n(\overline{q}^{(2)})$$

mentre dalla (13) otteniamo

$$\psi_a'(\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2!}}\left\{\psi_n(\overline{q}^{(1)})\psi_n(\overline{q}^{(2)}) - \psi_n(\overline{q}^{(2)})\psi_n(\overline{q}^{(1)})\right\} = 0$$

Dunque se due fermioni identici potessero occupare il medesimo stato quantico, rimarrebbero privi di funzione d'onda.
Questo risultato è in accordo col "Principio di esclusione" formulato nel 1925 da W. Pauli.
Questo Principio afferma che due fermioni identici non possono occupare un medesimo stato quantico.
In base a quanto si è stabilito in questo studio, si può affermare che il Principio di esclusione è una conseguenza della indistinguibilità quantistica delle particelle identiche.