

Enrico Borghi

FLUSSO DI PARTICELLE ATTRAVERSO UNO SCHERMO DOTATO DI FESSURE

In questo studio ci proponiamo di descrivere e commentare un esperimento che studieremo nell'ambito della Meccanica quantistica: è il "Flusso di particelle attraverso uno schermo dotato di fessure".

Nella INTRODUZIONE presentiamo sinteticamente, per punti, innanzitutto le equazioni, le definizioni e i concetti della Meccanica di Schrödinger di cui ci serviremo per descriverlo e, di seguito, il dispositivo sperimentale e l'esperimento.

Nelle successive SEZIONI I,II e III viene presentata in dettaglio la trattazione matematica dell'esperimento.

INTRODUZIONE

1) La $\psi(\overline{\mathcal{R}}, t)$, soluzione dell'equazione di Schrödinger nelle coordinate $\overline{\mathcal{R}}$, spesso denominata funzione d'onda nelle coordinate

$$\frac{(-i\hbar\nabla_{\overline{\mathcal{R}}})^2}{2m_0}\psi(\overline{\mathcal{R}}, t) + \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}})\psi(\overline{\mathcal{R}}, t) - i\hbar\frac{\partial\psi(\overline{\mathcal{R}}, t)}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \overline{\mathcal{R}} \equiv x, y, z \quad (1)$$

è una funzione complessa di variabile reale che descrive, nello spazio di Hilbert, lo stato del sistema costituito da una particella di massa m_0 dotata di energia cinetica $(-i\hbar\nabla_{\overline{\mathcal{R}}})^2/2m_0$ e di energia potenziale $\mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}})$.

Il termine $-i\hbar\nabla_{\overline{\mathcal{R}}} \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial\overline{\mathcal{R}}} \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$ è la rappresentazione dell'operatore momento \hat{p} nella base costituita dagli autovettori dell'operatore posizione $\hat{\mathcal{R}}$.

Secondo l'Interpretazione di Copenhagen la quantità $\psi^*(\overline{\mathcal{R}}, t)\psi(\overline{\mathcal{R}}, t)d\overline{\mathcal{R}}$ rappresenta la probabilità che, a seguito di una misura, la particella avente massa m_0 venga trovata nell'intorno $d\overline{\mathcal{R}}$ della posizione $\overline{\mathcal{R}}$ all'istante t ; la quantità $\psi^*(\overline{\mathcal{R}}, t)\psi(\overline{\mathcal{R}}, t)$ è la corrispondente densità di probabilità mentre la funzione d'onda $\psi(\overline{\mathcal{R}}, t)$ è definita come ampiezza di probabilità della posizione della particella.

La $\varphi(\overline{p}, t)$, soluzione dell'equazione di Schrödinger nei momenti \overline{p} , spesso denominata funzione d'onda nei momenti

$$\frac{p^2}{2m_0}\varphi(\overline{p}, t) + \mathcal{V}(i\hbar\nabla_{\overline{p}})\varphi(\overline{p}, t) - i\hbar\frac{\partial\varphi(\overline{p}, t)}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \overline{p} \equiv p_x, p_y, p_z \quad (2)$$

è una funzione complessa di variabile reale che descrive, nello spazio di Hilbert, lo stato del sistema costituito da una particella di massa m_0 dotata di energia cinetica $p^2/2m_0$ e di energia potenziale $\mathcal{V}(i\hbar\nabla_{\overline{p}})$.

Il termine $i\hbar\nabla_{\overline{p}} \equiv i\hbar\frac{\partial}{\partial\overline{p}} \equiv i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}, i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y}, i\hbar\frac{\partial}{\partial p_z}$ è la rappresentazione dell'operatore posizione $\hat{\mathcal{R}}$ nella base costituita dagli autovettori dell'operatore momento \hat{p} .

Secondo l'Interpretazione di Copenhagen la quantità $\varphi^*(\overline{p}, t)\varphi(\overline{p}, t)d\overline{p}$ rappresenta la probabilità che, a seguito di una misura, la particella avente massa m_0 venga trovata nell'intorno $d\overline{p}$ del momento \overline{p} all'istante t ; la quantità $\varphi^*(\overline{p}, t)\varphi(\overline{p}, t)$ è la corrispondente densità di probabilità mentre la funzione d'onda $\varphi(\overline{p}, t)$ viene definita come l'ampiezza di probabilità del momento della particella.

Nel seguito di questa Introduzione considereremo una versione monodimensionale di quanto si è detto finora: $\psi(\overline{\mathcal{R}}, t) \rightarrow \psi(x, t) \quad ; \quad \varphi(\overline{p}, t) \rightarrow \varphi(p_x, t)$.

2) Le $\psi(x, t)$ e $\varphi(p_x, t)$ che prenderemo in considerazione sono del tipo “a pacchetto d’onde” così detto perché è il risultato della combinazione di onde dotate di diversa ampiezza, frequenza e fase che si sommano in modo da interferire in modo costruttivo in una regione limitata dello spazio e in modo distruttivo altrove.

Un pacchetto d’onde descrive la distribuzione spaziale dell’ampiezza di probabilità della posizione di una particella se stiamo considerando l’eq. (1), o del momento di una particella se stiamo considerando l’eq. (2).

3) Nell’Appendice A, che tratta di alcune proprietà della trasformazione di Fourier, viene mostrato che per una generica coppia di funzioni Fourier-coniugate, come lo sono le (A2) e (A3) che qui riportiamo ($\bar{x} \equiv x_1, x_2, x_3$ e $\bar{y} \equiv y_1, y_2, y_3$)

$$\psi(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \varphi(\bar{y}) e^{i\bar{y} \cdot \bar{x}} d\bar{y} \quad ; \quad \varphi(\bar{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \psi(\bar{x}) e^{-i\bar{y} \cdot \bar{x}} d\bar{x} \quad (3)$$

$$\psi(\bar{x}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \varphi(\bar{y})$$

vale la relazione (A39) che qui riportiamo (il soprassegno sull’indice ripetuto k sta a indicare che non vi è somma su k):

$$\Delta x_{\bar{k}} \Delta y_{\bar{k}} \geq \frac{1}{2} \quad ; \quad k = 1, 2, 3 \quad (4)$$

In essa Δx_k e Δy_k indicano la deviazione standard di x_k e y_k cioè misurano la estensione di x_k e y_k attorno al valor medio del dominio di definizione rispettivamente di $\psi(\bar{x})$ e $\varphi(\bar{y})$.

4) Nell’Appendice B viene mostrato che la $\psi(x, t)$ e la $\varphi(p_x, t)$, versioni monodimensionali delle $\psi(\bar{\mathcal{R}}, t)$ e $\varphi(\bar{p}, t)$ espresse dalle (B1) e (B2) che qui riportiamo

$$\psi(\bar{\mathcal{R}}, t) = \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\bar{p}, t) e^{i\frac{\bar{p}}{h} \cdot \bar{\mathcal{R}}} d\bar{p} \quad ; \quad \bar{\mathcal{R}} \equiv x, y, z \quad ; \quad [\psi] = [lunghezza]^{-\frac{3}{2}} \quad (5)$$

$$\varphi(\bar{p}, t) = \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\bar{\mathcal{R}}, t) e^{-i\frac{\bar{p}}{h} \cdot \bar{\mathcal{R}}} d\bar{\mathcal{R}} \quad ; \quad \bar{p} \equiv p_x, p_y, p_z \quad ; \quad [\varphi] = [momento]^{-\frac{3}{2}}$$

costituiscono, in ogni istante t , una coppia di funzioni Fourier-coniugate:

$$\psi(x, t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \varphi(p_x, t)$$

• Notiamo che al prodotto scalare $\bar{y} \cdot \bar{x}$ che compare negli esponenziali delle (3) corrisponde il prodotto scalare $\frac{\bar{p}}{h} \cdot \bar{\mathcal{R}}$ che compare negli esponenziali delle (5). Questa corrispondenza, nello spazio monodimensionale che stiamo considerando in questa Introduzione, diventa

$$y_1 x_1 \longleftrightarrow \frac{p_x}{h} x \quad (6)$$

5) Se ora consideriamo la proprietà delle funzioni Fourier-coniugate espressa dalla (4), assumiamo in essa $k = 1$ e, in accordo con la (6), poniamo $x_1 = x$ e $y_1 = p_x/h$ otteniamo

$$\Delta x \Delta \frac{p_x}{h} \geq \frac{1}{2}$$

ovvero

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (7)$$

che è il *Principio di Indeterminazione* di Heisenberg.

In esso Δx e Δp_x indicano la deviazione standard di x e p_x cioè misurano la estensione di x e p_x attorno al valor medio del dominio di definizione rispettivamente di $\psi(x, t)$ e $\varphi(p_x, t)$.

6) L'esperimento che ci proponiamo di descrivere consiste nell'invio di numerose particelle di massa m_0 (anche una alla volta) verso uno schermo S dotato di due fessure; alcune particelle passeranno attraverso le fessure, altre verranno bloccate da S.

7) Le particelle che passano attraverso l'una o l'altra delle due fessure vengono raccolte da uno schermo di raccolta R impattando sul quale le particelle lasciano un segno luminoso visibile.

8) L'esperimento viene ripetuto più volte mantenendo invariati il dispositivo sperimentale e le modalità dell'esecuzione (punti 6 e 7) ma modificando ogni volta il valore m_0 che potrà aumentare o diminuire.

9) Riscriviamo il Principio di indeterminazione nel modo seguente:

$$\Delta x \geq \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m_0 \Delta v_x} \quad ; \quad p_x = m_0 v_x$$

10) All'aumentare di m_0 corrisponde una diminuzione di Δx cosicché il pacchetto d'onde associato a ogni particella subisce una progressiva contrazione arrivando a passare attraverso l'una o l'altra delle due fessure dello schermo S e formando così, sullo schermo R, immagini della densità di probabilità $\psi^*(x, t)\psi(x, t)$ del tipo di fig.1, Sezione III.

Immagini di questo tipo tendono, all'aumentare di m_0 , a rimanere pressoché invariate in forma e a diventare sempre più simili a quelle che compaiono nella descrizione che la Meccanica classica fornisce per questo esperimento.

11) Al diminuire di m_0 corrisponde un aumento di Δx cosicché il pacchetto d'onde associato a ogni particella subisce una progressiva estensione arrivando a coprire entrambe le fessure di S nelle quali entra dividendosi in due parti.

Si formano così due pacchetti d'onde che attraversano le fessure dello schermo S a valle del quale, in accordo col Principio quantistico di sovrapposizione, formano uno stato singolo in cui si genera il fenomeno dell'interferenza. Questa crea sullo schermo R zone nelle quali le particelle non vanno quasi mai a finire, e quindi la probabilità di trovarle in quelle zone è prossima a zero, intercalate da zone in cui la probabilità di trovarle è maggiore di zero. Nelle figure da 4 a 12, Sezione III, sono rappresentate le densità di probabilità per svariati valori di m_0 .

- Notiamo che ciò che viene diviso in due è il pacchetto d'onde associato alla particella, e non la particella stessa.

- Notiamo anche che, poiché Δx arriva a coprire entrambe le fessure di S, diviene impossibile determinare quale è la fessura attraverso cui ciascuna particella passa, e quindi la traiettoria di ciascuna particella rimane imprecisata. Ciò che l'esperimento ci permette di conoscere è il punto di arrivo di ogni particella sullo schermo R.

- Notiamo infine che la Meccanica di Schrödinger prevede la formazione di immagini della densità di probabilità $\psi^*(x, t)\psi(x, t)$ che, al diminuire di m_0 , tendono a diventare sempre più diverse da quelle previste dalla Meccanica classica. Questo è dovuto al fatto che la Meccanica di Schrödinger tratta pacchetti d'onde ciascuno dei quali, se m_0 è abbastanza piccola, entra in entrambe le fessure di S dividendosi in due parti che generano interferenza a valle di S, mentre la Meccanica classica tratta particelle puntiformi che entrano o nell'una o nell'altra fessura rimanendo integre quale che sia la loro massa, cosicché non si vede come, a valle di S, possa formarsi alcunché in grado di dare origine ai fenomeni di natura interferenziale del tipo di quelli che vengono osservati.

12) L'esperienza mostra che le previsioni della Meccanica di Schrödinger sono corrette quali che siano i valori di m_0 , mentre le previsioni della Meccanica classica sono corrette solo per grandi valori di m_0 .

13) Le Sezioni I e II che seguono contengono concetti, definizioni ed equazioni che verranno utilizzati nella Sezione III, nella quale viene descritto in dettaglio matematico il flusso di particelle attraverso uno schermo dotato di due fessure.

La Sezione I mostra come la Meccanica di Schrödinger descrive una particella libera.

La Sezione II si interessa al flusso di particelle attraverso uno schermo dotato di una sola fessura.

SEZIONE I - *Particella libera*

In Meccanica newtoniana la traiettoria di una particella libera, cioè non soggetta a forze, è una retta sulla quale la particella si muove di moto uniforme. La retta passa per la posizione $\overline{\mathcal{R}}_0$ che la particella ha in un certo istante dal quale si comincia a contare il tempo (istante iniziale t_0) e ha la direzione del momento lineare \overline{p}_0 che la particella ha in t_0 e che, per definizione di particella libera, rimane costante al passare del tempo.

Assumendo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e facendo coincidere, per semplicità, la traiettoria della particella con l'asse x , si ha $\overline{\mathcal{R}}_0 \equiv x_0, 0, 0$ e $\overline{p}_0 \equiv p_{x0}, 0, 0$.

Le quantità $x_0 = x(t_0)$ e $p_{x0} = p_x(t_0)$ sono le ben note “condizioni iniziali” arbitrariamente prefissabili che intervengono nella integrazione delle equazioni differenziali del moto per determinare in modo univoco l'equazione oraria della particella.

In Meccanica di Hamilton-Jacobi si cerca di determinare non la traiettoria, ma lo stato della particella, che è espresso nello spazio delle coordinate da una quantità scalare $S_{\mathcal{R}}$ soluzione dell'equazione

$$\frac{1}{2m_0} \left(\frac{\partial S_{\mathcal{R}}(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial S_{\mathcal{R}}(x, t)}{\partial t} = 0$$

dove m_0 è la massa della particella.

È possibile definire lo stato della particella anche nello spazio dei momenti: è una quantità espressa dallo scalare S_p soluzione dell'equazione

$$\frac{p_x^2}{2m_0} + \frac{\partial S_p(p_x, t)}{\partial t} = 0$$

Fra $S_{\mathcal{R}}(x, t)$ e $S_p(p_x, t)$ esiste il legame della trasformata di Legendre

$$S_{\mathcal{R}}(x, t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} S_p(p_x, t)$$

Una volta ottenuto $S_{\mathcal{R}}$ o S_p e note le condizioni iniziali, è possibile conoscere la traiettoria della particella.

In Meccanica di Schrödinger lo stato probabilistico di una particella libera nella rappresentazione monodimensionale delle coordinate è espresso, in un appropriato spazio di Hilbert, in funzione della soluzione $\psi(x, t)$ dell'equazione (v. il punto 1 dell'Introduzione)

$$\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \mathcal{V}(x) = 0 \quad (1)$$

detta “ampiezza di probabilità di posizione”, mentre nella rappresentazione monodimensionale dei momenti è espresso in funzione della soluzione $\varphi(p_x, t)$ della

$$\frac{p_x^2}{2m_0} \varphi(p_x, t) - i\hbar \frac{\partial \varphi(p_x, t)}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \mathcal{V}\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}\right) = 0$$

detta “ampiezza di probabilità di momento”.

Fra ψ e φ esiste la relazione

$$\psi(x, t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \varphi(p_x, t)$$

cioè la ψ e la φ sono, per ogni prefissato istante t , una coppia di funzioni Fourier-coniugate. Tuttavia, diversamente da quanto succede in Meccanica classica, una volta determinato ψ o φ la traiettoria della particella rimane sconosciuta, perché non è di essa che la Meccanica di Schrödinger si occupa.

Ciò che la Meccanica di Schrödinger nell'Interpretazione di Copenhagen ci consente di fare è prevedere la probabilità che, effettuando in un certo istante t una misura di posizione, la particella venga trovata dotata di posizione compresa fra x e $x + dx$, oppure, effettuando una misura di momento, la particella venga trovata dotata di momento compreso fra p_x e $p_x + dp_x$.

Tali probabilità sono espresse rispettivamente, come sappiamo, da $\psi^*(x, t)\psi(x, t)dx$ e $\varphi^*(p_x, t)\varphi(p_x, t)dp_x$: si deve con ciò intendere che, effettuando nel medesimo istante t una misura di posizione (momento) su un numero N di sistemi meccanici costituiti ciascuno da una particella libera avente massa m_0 e identicamente preparati, il rapporto fra il numero delle volte che a particella viene trovata nell'intervallo $x \vdash x + dx$ (o $p_x \vdash p_x + dp_x$) e il numero N delle misure si approssima a $\psi^*(x, t)\psi(x, t)dx$ (o $\varphi^*(p_x, t)\varphi(p_x, t)dp_x$) al crescere di N . In alternativa, se il dispositivo sperimentale rimane invariato dopo ciascuna misura, si possono effettuare N misure su un medesimo dispositivo, come succede in questo studio. Parlare di "sistemi identicamente preparati" riconduce al problema della introduzione delle condizioni iniziali x_0 e p_{x_0} .

Le considerazioni che la meccanica di Schrödinger ci obbliga a fare in proposito sono assai diverse da quelle della Meccanica classica, perché il Principio di Indeterminazione (v. l'eq. (7) dell'Introduzione) ci consente di definire con precisione una sola di queste variabili, o la posizione o il momento, e, dopo aver deciso quale è la variabile che intendiamo definire con precisione, l'altra variabile resta completamente indeterminata.

Fra queste due situazioni estreme

1) posizione determinata ($\Delta x_0 = 0$); momento indeterminato ($\Delta p_{x_0} \rightarrow \infty$)

2) posizione indeterminata ($\Delta x_0 \rightarrow \infty$); momento determinato ($\Delta p_{x_0} = 0$)

ve ne sono infinite altre possibili in cui sia la posizione che il momento sono indeterminati, essendo le indeterminazioni legate fra loro dal Principio di Indeterminazione. Nello studio che faremo ci riferiremo a una di queste ultime e assumeremo che la particella sia stata preparata nell'istante iniziale in modo che sia

$$\Delta x_0 \Delta p_{x_0} = \frac{1}{2} \hbar = \frac{1}{2} \cdot 1,054494 \cdot 10^{-27} \text{ ergsec} = 0,527247 \cdot 10^{-27} \text{ ergsec} \quad (2)$$

Una particella così caratterizzata è detta trovarsi in uno stato di indeterminazione minima. Le sue ampiezze di probabilità di posizione e momento iniziali sono, con le modifiche del caso, le (A44) e (A45) dell'Appendice A nelle quali poniamo $\bar{y} = \bar{p}/\hbar$:

$$\psi(x, 0) = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta x_0}} e^{-\frac{(x - \langle x \rangle_0)^2}{4(\Delta x_0)^2} + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle_0 x} \quad ; \quad [\psi] = \frac{1}{\sqrt{\text{lunghezza}}} \quad (3)$$

e anche

$$\varphi(p_x, 0) = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta p_{x_0}}} e^{-\frac{(p_x - \langle p_x \rangle_0)^2}{4(\Delta p_x)^2} - \frac{i}{\hbar} \langle x \rangle_0 (p_x - \langle p_x \rangle_0)} \quad ; \quad [\varphi] = \frac{1}{\sqrt{\text{momento}}} \quad (4)$$

In queste espressioni le quantità note sono $\langle x \rangle_0$ e $\langle p_x \rangle_0$, valori medi di posizione e momento della particella in $t_0 = 0$, mentre

$$\Delta x_0 = \sqrt{\langle (x_0 - \langle x \rangle_0)^2 \rangle} \quad ; \quad \Delta p_{x_0} = \sqrt{\langle (p_{x_0} - \langle p_x \rangle_0)^2 \rangle}$$

sono le corrispondenti deviazioni standard (v. eq. (A20) dell'Appendice A) per le quali vale la (2). Se ora, in accordo col fatto che la probabilità che la particella si trovi in un punto dello spazio è pari a 1, imponiamo che sia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, 0) \psi(x, 0) dx = 1 \quad (5)$$

otteniamo dalla (3)

$$\frac{A}{\sqrt{2\pi}\Delta x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle_0)^2}{2(\Delta x_0)^2}} dx = \frac{\sqrt{2}A\Delta x_0}{\sqrt{2\pi}\Delta x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle_0)^2}{2(\Delta x_0)^2}} d\frac{x-\langle x \rangle_0}{\sqrt{2}\Delta x_0} = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

e perciò, essendo $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$, si ha $A = 1$ e, con ragionamenti simili, si ottiene anche $B = 1$. Segue

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{1/2}\Delta x_0}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle_0)^2}{4(\Delta x_0)^2} + \frac{i}{\hbar}\langle p_x \rangle_0 x} \quad (6)$$

e

$$\varphi(p_x, 0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{1/2}\Delta p_{x_0}}} e^{-\frac{(p_x-\langle p_x \rangle_0)^2}{4(\Delta p_{x_0})^2} - \frac{i}{\hbar}\langle x \rangle_0(p_x-\langle p_x \rangle_0)} \quad (7)$$

Le densità di probabilità associate alle (6) e (7) sono

$$\psi^*(x, 0)\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta x_0} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle_0)^2}{2(\Delta x_0)^2}} \quad (8)$$

$$\varphi^*(p_x, 0)\varphi(p_x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta p_{x_0}} e^{-\frac{(p_x-\langle p_x \rangle_0)^2}{2(\Delta p_{x_0})^2}} \quad (9)$$

Ricordando l'espressione della *densità di probabilità gaussiana*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} d\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

dove m è il valor medio e σ è la deviazione standard della variabile aleatoria x , si vede che le (8) e (9) sono gaussiane centrate in $\langle x \rangle_0$ e $\langle p_x \rangle_0$.

* * *

Una $\psi(x, t)$ che sia soluzione della (1) e che abbia per $t = 0$ le caratteristiche espresse dalle (2), (6) e (7) è detta a gruppo d'onde, o pacchetto d'onde, monodimensionale a indeterminazione minima.

Per gli istanti $t > 0$ la ψ si ottiene dalla (B1) dell'Appendice B ponendo in essa $\bar{\mathcal{R}} \equiv x, 0, 0$ e $\bar{p} \equiv p_x, 0, 0$ e assumendo

$$\varphi(p_x, t) = \varphi(p_x, 0)e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}t} \quad ; \quad \mathcal{E} = \frac{p_x^2}{2m_0} \quad ; \quad [\varphi] = \text{momento}^{-1/2} \quad (11)$$

con $\varphi(p_x, 0)$ espresso dalla (7), cosicché la (B1) diviene

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p_x, 0) e^{\frac{i}{\hbar} \left(p_x x - \frac{p_x^2}{2m_0} t \right)} dp_x \quad ; \quad [\psi] = L^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Sostituendo la (7) nella (12) si ottiene

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\hbar} \sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta p_{x0}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(p_x - \langle p_x \rangle_0)^2}{4(\Delta p_x)_0^2} - \frac{i}{\hbar} \langle x \rangle_0 (p_x - \langle p_x \rangle_0) + \frac{i}{\hbar} \left(p_x x - \frac{p_x^2}{2m_0} t \right)} dp_x$$

Ponendo $\eta = p_x - \langle p_x \rangle_0$ si può trasformare l'esponenziale nel modo che segue:

$$e^{-\frac{(p_x - \langle p_x \rangle_0)^2}{4(\Delta p_x)_0^2} - \frac{i}{\hbar} \langle x \rangle_0 (p_x - \langle p_x \rangle_0) + \frac{i}{\hbar} \left(p_x x - \frac{p_x^2}{2m_0} t \right)} = e^{-\frac{\eta^2}{4(\Delta p_x)_0^2} - \frac{i}{\hbar} \langle x \rangle_0 \eta + \frac{i}{\hbar} \left(p_x x - \frac{p_x^2}{2m_0} t \right)}$$

Poiché $p_x = \eta + \langle p_x \rangle_0$ segue

$$\begin{aligned} p_x x - \frac{p_x^2}{2m_0} t &= (\eta + \langle p_x \rangle_0) x - \frac{(\eta + \langle p_x \rangle_0)^2}{2m_0} t \\ &= \left(x - \frac{\langle p_x \rangle_0}{m_0} t \right) \eta - \frac{\eta^2}{2m_0} t + \langle p_x \rangle_0 x - \frac{\langle p_x \rangle_0^2}{2m_0} t \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} e^{-\frac{(p_x - \langle p_x \rangle_0)^2}{4(\Delta p_x)_0^2} - \frac{i}{\hbar} \langle x \rangle_0 (p_x - \langle p_x \rangle_0) + \frac{i}{\hbar} \left(p_x x - \frac{p_x^2}{2m_0} t \right)} &= \\ &= e^{-\frac{1}{4(\Delta p_x)_0^2} \eta^2 - \frac{it}{2m_0 \hbar} \eta^2 + \frac{i}{\hbar} \left(x - \langle x \rangle_0 - \frac{\langle p_x \rangle_0}{m_0} t \right) \eta} e^{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\langle p_x \rangle_0^2}{2m_0} t - \langle p_x \rangle_0 x \right)} \end{aligned}$$

Notiamo che il secondo esponenziale a membro destro non dipende da η e perciò:

$$\psi(x, t) = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\langle p_x \rangle_0^2}{2m_0} t - \langle p_x \rangle_0 x \right)}}{\sqrt{\hbar} \sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta p_{x0}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{it}{2m_0 \hbar} + \frac{1}{4(\Delta p_{x0})^2} \right) \eta^2 + \frac{i}{\hbar} \left(x - \langle x \rangle_0 - \frac{\langle p_x \rangle_0}{m_0} t \right) \eta} d\eta$$

L'integrale a membro destro è del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \rho^2 + ib\rho} d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{-b^2}{4a^2}}$$

perciò

$$\psi(x, t) = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\langle p_x \rangle_0^2}{2m_0} t - \langle p_x \rangle_0 x \right)}}{\sqrt{\hbar} \sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta p_{x_0}}} \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{-b^2}{4a^2}} \quad (13)$$

essendo

$$a = \sqrt{\frac{it}{2m_0 \hbar} + \frac{1}{4(\Delta p_x)_0^2}} = \sqrt{\frac{it}{2m_0 \hbar} + \frac{1}{4 \frac{\hbar^2}{4(\Delta x)_0^2}}} = \frac{\Delta x_0}{\hbar} \sqrt{1 + i \frac{\hbar}{2m_0 (\Delta x)_0^2} t}$$

e

$$b = \frac{1}{\hbar} \left(x - \langle x \rangle_0 - \frac{\langle p_x \rangle_0}{m_0} t \right)$$

Ora osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\hbar} \sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta p_{x_0}}} \frac{\sqrt{\pi}}{a} &= \frac{1}{\sqrt{\hbar} \sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta p_{x_0}}} \frac{\hbar \sqrt{\pi}}{\Delta x_0 \sqrt{1 + i \frac{\hbar}{2m_0 (\Delta x)_0^2} t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{1/2} \hbar \Delta p_{x_0} \Delta x_0}} \frac{\hbar \sqrt{\pi}}{\sqrt{\Delta x_0} \sqrt{1 + i \frac{\hbar}{2m_0 (\Delta x)_0^2} t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{1/2} \hbar \frac{1}{2} \hbar}} \frac{\hbar \sqrt{\pi}}{\sqrt{\Delta x_0} \sqrt{1 + i \frac{\hbar}{2m_0 (\Delta x)_0^2} t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{1/2} \hbar^2 \pi}} \frac{\hbar \sqrt{\pi}}{\sqrt{\Delta x_0} \sqrt{1 + i \frac{\hbar}{2m_0 (\Delta x)_0^2} t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta x_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + i \frac{\hbar}{2m_0 (\Delta x)_0^2} t}} \end{aligned}$$

perciò la (13) può essere scritta così

$$\psi(x, t) = \frac{e^{\frac{-b^2}{4a^2}}}{\sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta x_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + i \frac{\hbar}{2m_0 (\Delta x)_0^2} t}} e^{\frac{i}{\hbar} \left(\langle p_x \rangle_0 x - \frac{\langle p_x \rangle_0^2}{2m_0} t \right)}$$

Segue

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta x_0}} \frac{e^{\frac{-(x - \langle x \rangle_0 - \frac{\langle p_x \rangle_0}{m_0} t)^2}{4 \left((\Delta x)_0^2 + i \frac{\hbar}{2m_0} t \right)}}}{\sqrt{1 + i \frac{\hbar}{2m_0 (\Delta x)_0^2} t}} e^{\frac{i}{\hbar} \left(\langle p_x \rangle_0 x - \frac{\langle p_x \rangle_0^2}{2m_0} t \right)} \quad (14)$$

Questa è la soluzione a pacchetto d'onde della (1) che ci eravamo proposti di ottenere. Per $t = 0$ coincide con la (6).

Ora poniamo

$$a = x - \langle x \rangle_0 ; b = \frac{\langle p_x \rangle_0}{m_0} t ; c = \frac{1}{\hbar} (\langle p_x \rangle_0 x - \frac{\langle p_x \rangle_0^2}{2m_0} t) ; d = (\Delta x)_0^2 ; g = \frac{\hbar t}{2m_0}$$

cosicché gli esponenziali della (14) diventano

$$e^{-\frac{(a-b)^2}{4(d+ig)}} e^{ic} = e^{-\frac{(a-b)^2 + 4ic(d+ig)}{4(d+ig)}} = e^{-\frac{a^2 - b^2 + 2ab + 4icd - 4cg}{4d(1+i\frac{g}{d})}} = e^{-\frac{\frac{a^2}{4d} - \frac{b^2 - 2ab + 4cg}{4d} + ic}{1+i\frac{g}{d}}}$$

Sostituendo i valori di a, b, c, g si ottiene

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta x_0}} e^{\frac{-\frac{(x-\langle x \rangle_0)^2}{4(\Delta x)_0^2} - \frac{\langle x \rangle_0 \langle p_x \rangle_0 t}{2m_0(\Delta x)_0^2} + \frac{i}{\hbar} (\langle p_x \rangle_0 x - \frac{\langle p_x \rangle_0^2}{2m_0} t)}{1+i\frac{\hbar}{2(\Delta x)_0^2 m_0} t}}}{\sqrt{1+i\frac{\hbar}{2m_0(\Delta x)_0^2} t}} \quad (15)$$

che è un altro modo di esprimere la (14).

Consideriamo nuovamente le posizioni precedenti salvo a , che ora diviene $a = (x - \langle x \rangle_0 - \frac{\langle p_x \rangle_0}{m_0} t)$ (cioè ingloba b), cosicché gli esponenziali della (14) possono essere scritti così

$$e^{-\frac{a^2}{4(d+ig)}} e^{ic} = e^{-\frac{a^2 + 4ic(d+ig)}{4(d+ig)}} = e^{-\frac{-a^2(d-ig) + 4ic(d^2+g^2)}{4(d^2+g^2)}} = e^{-\frac{-a^2 d}{4d^2(1+\frac{g^2}{d^2})}} e^{\frac{i}{4d^2(1+\frac{g^2}{d^2})} (a^2 g + 4cd^2(1+\frac{g^2}{d^2}))}$$

e infine

$$e^{-\frac{a^2}{4(d+ig)}} e^{ic} = e^{-\frac{-a^2}{4d(1+\frac{g^2}{d^2})}} e^{\frac{i}{1+\frac{g^2}{d^2}} (\frac{a^2 g}{4d^2} + c(1+\frac{g^2}{d^2}))}$$

Sostituendo i valori di a, c, d, g si ottiene

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{1/2} \Delta x_0}} e^{\frac{-\frac{(x-\langle x \rangle_0 - \frac{\langle p_x \rangle_0}{m_0} t)^2}{4(\Delta x)_0^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m_0^2 (\Delta x)_0^4}\right)}}{\sqrt{1+i\frac{\hbar}{2m_0(\Delta x)_0^2} t}} \cdot e^{\frac{i}{1+\frac{\hbar^2 t^2}{4m_0^2 (\Delta x)_0^4}} \left\{ \frac{\langle p_x \rangle_0 x}{\hbar} - \frac{\langle p_x \rangle_0^2}{2m_0 \hbar} t + \frac{\hbar t \left((x-\langle x \rangle_0)^2 + \frac{2\langle x \rangle_0 \langle p_x \rangle_0 t}{m_0} \right)}{8m_0 (\Delta x)_0^4} \right\}} \quad (16)$$

equivalente alla (14) ma riasssemblata in modo da evidenziare, isolandolo, l'esponenziale immaginario. Le (14), (15) e (16) sono descrizioni equivalenti di un pacchetto d'onde monodimensionale che per $t = 0$ coincide con la (6).

Calcoliamo la densità di probabilità. Dalla (16) (che scegliamo fra le tre menzionate perché facilita il calcolo) si ricava

$$\psi^* \psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-\frac{(x-\langle x \rangle_0 - \frac{\langle p_x \rangle_0}{m_0} t)^2}{2(\Delta x)_0^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m_0^2 (\Delta x)_0^4}\right)}}}{\Delta x_0 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m_0^2 (\Delta x)_0^4}\right)} \quad (17)$$

Per $t = 0$ la (17) è una gaussiana (v. eq. (10)) che negli istanti successivi tende ad allargarsi e ad appiattirsi muovendosi con velocità $\langle p_x \rangle_0 / m_0$ sull'asse x .

Quanto più piccola è la massa, tanto più rapido è l'allargamento della gaussiana.

* * *

Abbiamo finora considerato un gruppo d'onde monodimensionale. Generalizzando a tre dimensioni (v. eq. (A44) e (A45) dell'Appendice A) si ottengono, in corrispondenza delle (6) e (7), le seguenti espressioni di pacchetti d'onda 3-dimensionali a indeterminazione minima:

$$\psi(\overline{\mathcal{R}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3/2} \Delta x_0 \Delta y_0 \Delta z_0}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle_0)^2}{4(\Delta x)_0^2} - \frac{(y-\langle y \rangle_0)^2}{4(\Delta y)_0^2} - \frac{(z-\langle z \rangle_0)^2}{4(\Delta z)_0^2} + \frac{i}{\hbar} \langle \overline{\mathbf{p}} \rangle_0 \cdot \overline{\mathcal{R}}} \quad (18)$$

$$\varphi(\overline{\mathbf{p}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3/2} \Delta p_{x_0} \Delta p_{y_0} \Delta p_{z_0}}} e^{-\frac{(p_x-\langle p_x \rangle_0)^2}{4(\Delta p_x)_0^2} - \frac{(p_y-\langle p_y \rangle_0)^2}{4(\Delta p_y)_0^2} - \frac{(p_z-\langle p_z \rangle_0)^2}{4(\Delta p_z)_0^2} - \frac{i}{\hbar} \langle \overline{\mathcal{R}} \rangle_0 \cdot (\overline{\mathbf{p}} - \langle \overline{\mathbf{p}} \rangle_0)} \quad (19)$$

con

$$\overline{\mathcal{R}} \equiv x, y, z \quad ; \quad \overline{\mathbf{p}} \equiv p_x, p_y, p_z$$

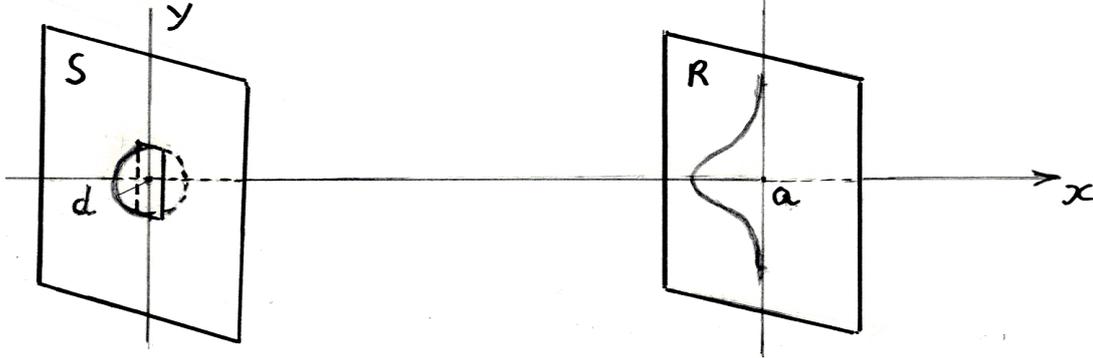
ed espressioni analogamente costruite in corrispondenza delle (14), (15), (16).

Si ha anche:

$$\Delta x_0 \Delta p_{x_0} = \frac{1}{2} \hbar \quad ; \quad \Delta y_0 \Delta p_{y_0} = \frac{1}{2} \hbar \quad ; \quad \Delta z_0 \Delta p_{z_0} = \frac{1}{2} \hbar$$

SEZIONE II - Particella attraverso una fessura

In Meccanica newtoniana la traiettoria di una particella libera avente massa m_0 che nell'istante iniziale $t = 0$ si trova in un punto x_0 dell'asse x di una terna cartesiana ortogonale e ha momento $p_{x_0} > 0, p_{y_0} \neq 0$ è una retta su cui la particella si muove nel verso delle x crescenti.



Se la traiettoria passa attraverso una fessura praticata su uno schermo, la particella attraverserà la fessura e potrà essere intercettata da una superficie rivelatrice posta a valle dello schermo. Secondo la Meccanica newtoniana il punto in cui la particella viene rivelata è quello in cui la traiettoria incontra la superficie rivelatrice.

Ci proponiamo ora di descrivere questo fenomeno in Meccanica di Schrödinger facendo riferimento alla figura.

Innanzitutto, nel definire le condizioni iniziali, occorre tener conto del fatto che non è possibile assumere per la posizione e il momento della particella valori iniziali precisi come si fa in Meccanica newtoniana. Ripetendo ragionamenti già fatti nel punto 2 dell'Introduzione possiamo associare alla particella un pacchetto d'onde.

Il pacchetto d'onde che considereremo è a indeterminazione minima e bidimensionale, essendo esteso lungo l'asse x e lungo l'asse y .

Riprendiamo in considerazione l'eq. (18) della sezione I che riscriviamo con riferimento allo spazio bidimensionale

$$\psi(x, y, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta x_0\Delta y_0}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle_0)^2}{4(\Delta x)_0^2} - \frac{(y-\langle y \rangle_0)^2}{4(\Delta y)_0^2} + \frac{i}{\hbar}(\langle p_x \rangle_0 x + \langle p_y \rangle_0 y)}$$

Ponendo

$$\langle x \rangle_0 = 0 \quad ; \quad \langle y \rangle_0 = 0 \quad ; \quad \langle p_y \rangle_0 = 0$$

e $d = \sqrt{2}\Delta x_0 = \sqrt{2}\Delta y_0$ si ottiene

$$\psi(x, y, 0) = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2d^2} + \frac{i}{\hbar}\langle p_x \rangle_0 x} \quad (1)$$

La ψ è la funzione d'onda bidimensionale di una particella che nell'istante $t = 0$ può essere osservata il più delle volte in un cerchio avente raggio d centrato nell'origine con momento p_x contenuto in un intervallo \hbar/d centrato su $\langle p_x \rangle_0$ e momento p_y contenuto in un uguale intervallo centrato su $\langle p_y \rangle_0 = 0$.

La (1) può essere fattorizzata

$$\psi(x, y) = \psi_x(x, 0)\psi_y(y, 0)$$

essendo

$$\psi_x(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{d\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2d^2} + \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle_0 x} \quad ; \quad \psi_y(y, 0) = \frac{1}{\sqrt{d\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{y^2}{2d^2}}$$

Tenendo presente la (16) della Sezione I si ottiene

$$\psi_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{d\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{(x - \frac{\langle p_x \rangle_0 t}{m_0})^2}{2d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}\right)}} \frac{e^{\frac{i}{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}} \left(\frac{\langle p_x \rangle_0 x}{\hbar} - \frac{\langle p_x \rangle_0^2 t}{2m_0 \hbar} + \frac{\hbar t x^2}{2m_0 d^4} \right)}}{\sqrt{1 + \frac{i\hbar t}{m_0 d^2}}} e$$

e, poiché $\langle p_y \rangle_0 = 0$, si ha anche

$$\psi_y(y, t) = \frac{1}{\sqrt{d\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{y^2}{2d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}\right)}} \frac{e^{\frac{i\hbar t y^2}{2m_0 d^4 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}\right)}}}{\sqrt{1 + \frac{i\hbar t}{m_0 d^2}}} e$$

perciò la funzione d'onda (o ampiezza di probabilità di posizione) della particella nello spazio compreso fra lo schermo S dotato di foro e la superficie rivelatrice R è espressa da

$$\psi(x, y, t) = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x - \frac{\langle p_x \rangle_0 t}{m_0})^2 + y^2}{2d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}\right)}} \frac{e^{\frac{i}{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}} \left(\frac{\langle p_x \rangle_0 x}{\hbar} - \frac{\langle p_x \rangle_0^2 t}{2m_0 \hbar} + \frac{\hbar t (x^2 + y^2)}{2m_0 d^4} \right)}}{1 + \frac{i\hbar t}{m_0 d^2}} e \quad (2)$$

Questa è l'espressione di un pacchetto d'onde bidimensionale che per $t = 0$ soddisfa la (1). La corrispondente densità di probabilità è espressa da

$$\psi^*(x, y, t)\psi(x, y, t) = \frac{1}{\pi d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}\right)} e^{-\frac{(x - \frac{\langle p_x \rangle_0 t}{m_0})^2 + y^2}{d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}\right)}} \quad ; \quad [\psi^* \psi] = L^{-2} \quad (3)$$

simile alla densità di probabilità gaussiana 2-dimensionale (x e y incorrelati)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

con $m_x = \frac{\langle p_x \rangle_0 t}{m_0}$, $m_y = 0$ e $\sigma_x = \sigma_y = \frac{d}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}}$. La (3) mostra che in $t = 0$ il centro della gaussiana, che coincide col suo valore massimo, è localizzato nell'origine da dove, al crescere del tempo, si sposta lungo l'asse x alla velocità $\langle p_x \rangle_0 / m_0$.

In corrispondenza di un istante generico t la gaussiana è centrata in $x = \langle p_x \rangle_0 t / m_0$, $y = 0$.

La densità di probabilità che la particella venga rivelata al tempo t sulla superficie rivelatrice R posta a distanza a dallo schermo S si ricava dalla (3) ed è espressa da

$$\psi^*(a, y, t)\psi(a, y, t) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\frac{(a - \frac{\langle p_x \rangle_0}{m_0} t)^2 + y^2}{d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}\right)}}}{d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}\right)}$$

Consideriamo l'istante t_R in cui il centro del pacchetto d'onde raggiunge R . Tale istante è espresso da

$$t_R = \frac{a}{\frac{\langle p_x \rangle_0}{m_0}}$$

cioè dal rapporto fra lo spazio percorso dal centro del pacchetto nel suo movimento da S a R e la velocità del pacchetto. Si ha allora la seguente densità di probabilità

$$\psi^*(a, y, t_R)\psi(a, y, t_R) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\frac{y^2}{d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 a^2}{\langle p_x \rangle_0^2 d^4}\right)}}}{d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 a^2}{\langle p_x \rangle_0^2 d^4}\right)}$$

che, una volta normalizzata, diviene

$$\psi^*(a, y, t_R)\psi(a, y, t_R) = \frac{1}{\sqrt{\pi} d \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 a^2}{\langle p_x \rangle_0^2 d^4}}} e^{-\frac{y^2}{d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 a^2}{\langle p_x \rangle_0^2 d^4}\right)}} \quad (4)$$

e infatti, ponendo per semplicità

$$K = \frac{\hbar a}{\langle p_x \rangle_0 d^2} \quad ; \quad [K] = \text{adimensionale}$$

si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dy = \frac{1}{\sqrt{\pi} d \sqrt{1 + K^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{d^2(1+K^2)}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{d^2(1+K^2)}} d \frac{y}{d \sqrt{1 + K^2}}$$

ovvero, ponendo $\xi = \frac{y}{d \sqrt{1 + K^2}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1$$

Esempi

Nelle due figure che seguono la densità di probabilità (4) viene presentata assumendo per entrambe i seguenti valori (unità CGS)

$$a = 10 \quad ; \quad \langle \mathcal{U}_x \rangle_0 = 10^6 \quad ; \quad d = 10^{-1}$$

cosicché, essendo $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$ e $p_x = m_0 \mathcal{U}_x$, si ottiene

$$K \approx \frac{10^{-30}}{m_0}$$

Nella prima figura la massa è 10g, nella seconda 10^{-33} g. Notiamo che, in accordo con la Meccanica newtoniana, le particelle di grande massa si addensano tutte attorno allo 0; la piccolissima dispersione è dovuta a $d = 10^{-1}$.

Invece le particelle di piccolissima massa si disperdono grandemente (si noti che nella seconda figura la scala delle y è 10 volte più compressa che nella prima figura).

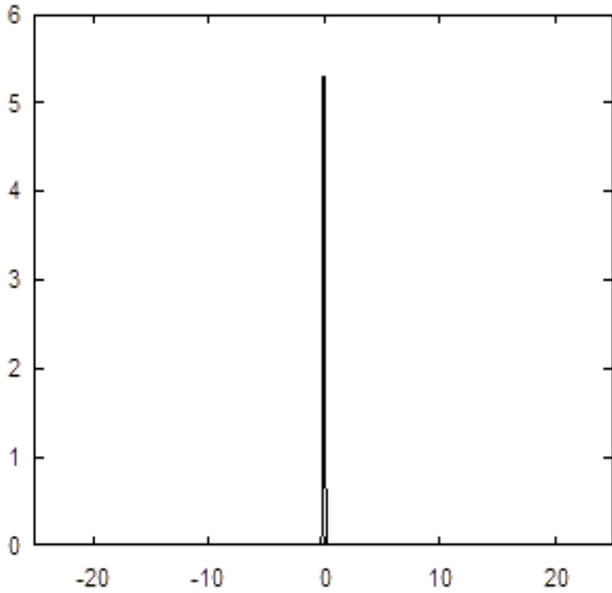


Fig.1; massa = 10

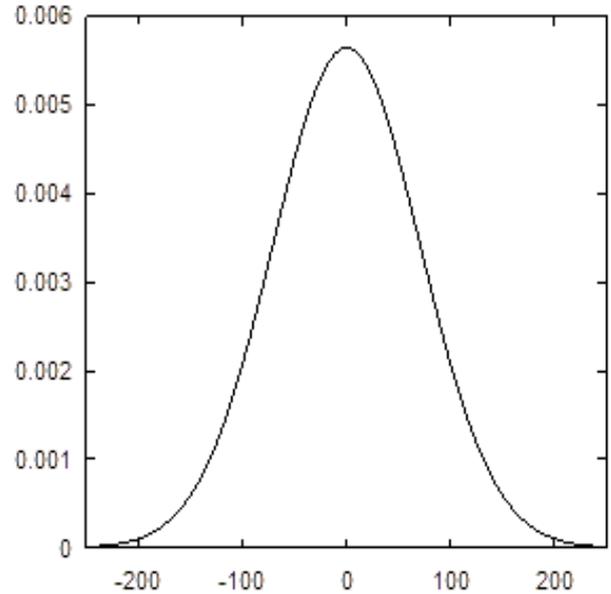


Fig.2; massa = 10^{-33}

SEZIONE III - *Particella attraverso due fessure*

Consideriamo ora un dispositivo sperimentale del tipo illustrato nella figura all'inizio della sezione precedente, ma da questo differente perché dotato di due fessure centrate in $y = \frac{1}{2}l$ e $-\frac{1}{2}l$, e una particella libera avente massa m_0 in moto verso lo schermo S .

In Meccanica newtoniana la traiettoria della particella è una retta che:

- 1) o passa per la prima fessura;
- 2) o passa per la seconda fessura;
- 3) o è intercettata dallo schermo

Nei primi due casi la particella può essere rivelata da una opportuna superficie sensibile posta a valle di S . Il punto in cui la particella viene rivelata è quello in cui la sua traiettoria rettilinea incontra la superficie rivelatrice.

In Meccanica di Schrödinger, ripetendo ragionamenti già fatti nella sezione II, associamo alla particella un pacchetto d'onde bidimensionale il cui centro è in moto verso S che è collocato in $x = 0$. Il pacchetto viene separato dalle due fessure di questo dispositivo in due parti cosicché in corrispondenza del piano dello schermo esso è costituito da due pacchetti d'onda bidimensionali. Indichiamo con ψ_1 quello centrato in $\frac{1}{2}l$ e con ψ_2 quello centrato in $-\frac{1}{2}l$. Tenendo presente la (1) della Sezione II si può scrivere

$$\psi_1(x, y, 0) = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 + (y - \frac{1}{2}l)^2}{2d^2}} e^{\frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle_0 x}$$

$$\psi_2(x, y, 0) = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 + (y + \frac{1}{2}l)^2}{2d^2}} e^{\frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle_0 x}$$

L'ampiezza di probabilità di posizione della particella nell'istante iniziale è espressa da (v. il punto 11 dell'Introduzione)

$$\psi(x, y, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2$$

All'istante $t > 0$ l'ampiezza di probabilità della particella è espressa da

$$\psi(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x, y, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x, y, t) \quad (1)$$

e le due componenti ψ_1 e ψ_2 si ricavano dalla (2) della Sezione II sostituendo in essa y rispettivamente con $y - \frac{1}{2}l$ e $y + \frac{1}{2}l$ cosicché

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) = & \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \frac{\langle p_x \rangle_0 t}{m_0})^2 + (y - \frac{1}{2}l)^2}{2d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}\right)}} e^{\frac{i}{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}} \left(\frac{\langle p_x \rangle_0 x}{\hbar} - \frac{\langle p_x \rangle_0^2 t}{2m_0 \hbar} + \frac{\hbar t (x^2 + (y - \frac{1}{2}l)^2)}{2m_0 d^4} \right)} + \\ & + \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \frac{\langle p_x \rangle_0 t}{m_0})^2 + (y + \frac{1}{2}l)^2}{2d^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}\right)}} e^{\frac{i}{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m_0^2 d^4}} \left(\frac{\langle p_x \rangle_0 x}{\hbar} - \frac{\langle p_x \rangle_0^2 t}{2m_0 \hbar} + \frac{\hbar t (x^2 + (y + \frac{1}{2}l)^2)}{2m_0 d^4} \right)} \end{aligned}$$

In analogia con quanto si è fatto nella sezione II siamo interessati a determinare la $\psi(x, y, t)$ per $x = a$ e $t = t_R = a/(\langle p_x \rangle_0/m_0)$. Si ha così:

$$\begin{aligned} \psi(a, y, t_R) = & \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\frac{1}{2}l)^2}{2d^2\left(1+\frac{\hbar^2 a^2}{\langle p_x \rangle_0^2 d^4}\right)}} \frac{e^{-\frac{i}{1+\frac{\hbar^2 a^2}{\langle p_x \rangle_0^2 d^4}}\left\{\frac{1}{2}\frac{\langle p_x \rangle_0 a}{\hbar} + \frac{\hbar a(a^2+(y-\frac{1}{2}l)^2)}{2\langle p_x \rangle_0 d^4}\right\}}}{1+\frac{i\hbar a}{\langle p_x \rangle_0 d^2}} + \\ & + \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+\frac{1}{2}l)^2}{2d^2\left(1+\frac{\hbar^2 a^2}{\langle p_x \rangle_0^2 d^4}\right)}} \frac{e^{-\frac{i}{1+\frac{\hbar^2 a^2}{\langle p_x \rangle_0^2 d^4}}\left\{\frac{1}{2}\frac{\langle p_x \rangle_0 a}{\hbar} + \frac{\hbar a(a^2+(y+\frac{1}{2}l)^2)}{2\langle p_x \rangle_0 d^4}\right\}}}{1+\frac{i\hbar a}{\langle p_x \rangle_0 d^2}} \end{aligned}$$

Per semplificare la scrittura poniamo

$$K = \frac{\hbar a}{\langle p_x \rangle_0 d^2} \quad ; \quad [K] = \text{adimensionale} \quad (2)$$

Segue

$$\begin{aligned} \psi(a, y, t_R) = & \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(y-\frac{1}{2}l)^2}{2d^2(1+K^2)}}}{1+iK} e^{\frac{i}{1+K^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\langle p_x \rangle_0 a}{\hbar} + K\frac{a^2+(y-\frac{1}{2}l)^2}{2d^2}\right\}} + \\ & + \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(y+\frac{1}{2}l)^2}{2d^2(1+K^2)}}}{1+iK} e^{\frac{i}{1+K^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\langle p_x \rangle_0 a}{\hbar} + K\frac{a^2+(y+\frac{1}{2}l)^2}{2d^2}\right\}} \end{aligned}$$

Raccogliamo le costanti:

$$\begin{aligned} \psi(a, y, t_R) = & \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\frac{i}{1+K^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\langle p_x \rangle_0 a}{\hbar} + \frac{iKa^2}{2(1+K^2)d^2}\right\}}}{1+iK} \cdot \\ & \cdot \left\{ e^{-\frac{(y-\frac{1}{2}l)^2}{2d^2(1+K^2)} + \frac{iK}{1+K^2}\frac{(y-\frac{1}{2}l)^2}{2d^2}} + e^{-\frac{(y+\frac{1}{2}l)^2}{2d^2(1+K^2)} + \frac{iK}{1+K^2}\frac{(y+\frac{1}{2}l)^2}{2d^2}} \right\} \end{aligned}$$

Indichiamo con $Ae^{i\varphi}$ la costante fuori dalle parentesi graffe essendo

$$A = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}(1+iK)} \quad ; \quad e^{i\varphi} = e^{\frac{i}{1+K^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\langle p_x \rangle_0 a}{\hbar} + \frac{iKa^2}{2(1+K^2)d^2}\right\}}$$

Segue:

$$\psi(a, y, t_R) = Ae^{i\varphi} \left\{ e^{-\frac{(y-\frac{1}{2}l)^2}{2d^2(1+K^2)} + \frac{iK}{1+K^2}\frac{(y-\frac{1}{2}l)^2}{2d^2}} + e^{-\frac{(y+\frac{1}{2}l)^2}{2d^2(1+K^2)} + \frac{iK}{1+K^2}\frac{(y+\frac{1}{2}l)^2}{2d^2}} \right\}$$

da cui

$$\psi(a, y, t_R) = Ae^{i\varphi} \left\{ e^{-\frac{(y^2+\frac{1}{4}l^2-ly)(1-iK)}{2d^2(1+K^2)}} + e^{-\frac{(y^2+\frac{1}{4}l^2+ly)(1-iK)}{2d^2(1+K^2)}} \right\}$$

ovvero

$$\psi(a, y, t_R) = Ae^{i\varphi} e^{-\frac{1-iK}{2d^2(1+K^2)}(y^2+\frac{1}{4}l^2)} \left\{ e^{\frac{l(1-iK)}{2d^2(1+K^2)}y} + e^{-\frac{l(1-iK)}{2d^2(1+K^2)}y} \right\}$$

Poniamo

$$\alpha = \frac{1-iK}{2d^2(1+K^2)} \quad ; \quad [\alpha] = L^{-2}$$

Segue

$$\psi(a, y, t_R) = Ae^{i\varphi} e^{-\alpha(y^2+\frac{1}{4}l^2)}(e^{\alpha ly} + e^{-\alpha ly})$$

La corrispondente densità di probabilità è espressa da

$$\psi^* \psi = A^* e^{-i\varphi} e^{-\alpha^*(y^2+\frac{1}{4}l^2)}(e^{\alpha^* ly} + e^{-\alpha^* ly}) Ae^{i\varphi} e^{-\alpha(y^2+\frac{1}{4}l^2)}(e^{\alpha ly} + e^{-\alpha ly})$$

ovvero

$$\psi^* \psi = |A|^2 e^{-(\alpha^*+\alpha)(y^2+\frac{1}{4}l^2)}(e^{(\alpha^*+\alpha)ly} + e^{(\alpha^*-\alpha)ly} + e^{-(\alpha^*-\alpha)ly} + e^{-(\alpha^*+\alpha)ly})$$

Poiché è

$$\alpha^* + \alpha = \frac{1}{d^2(1+K^2)} \quad ; \quad \alpha^* - \alpha = \frac{iK}{d^2(1+K^2)}$$

segue

$$\begin{aligned} \psi^* \psi &= |A|^2 e^{-\frac{y^2+\frac{1}{4}l^2}{d^2(1+K^2)}} \left(e^{\frac{ly}{d^2(1+K^2)}} + e^{\frac{iKly}{d^2(1+K^2)}} + e^{-\frac{iKly}{d^2(1+K^2)}} + e^{-\frac{ly}{d^2(1+K^2)}} \right) \\ &= 2|A|^2 e^{-\frac{y^2+\frac{1}{4}l^2}{d^2(1+K^2)}} \left(\frac{e^{\frac{l}{d^2(1+K^2)}y} + e^{-\frac{l}{d^2(1+K^2)}y}}{2} + \frac{e^{i\frac{Kl}{d^2(1+K^2)}y} + e^{-i\frac{Kl}{d^2(1+K^2)}y}}{2} \right) \end{aligned}$$

da cui infine

$$\psi^* \psi(y) = 2|A|^2 e^{-\frac{y^2+\frac{1}{4}l^2}{d^2(1+K^2)}} \left(\cosh \frac{l}{d^2(1+K^2)}y + \cos \frac{Kl}{d^2(1+K^2)}y \right) \quad (3)$$

con

$$|A|^2 = \frac{1}{2\pi d^2(1+K^2)}$$

Esempi.

Nelle dodici figure che seguono la densità di probabilità (3) viene presentata assumendo una massa m_0 variabile da 10g a 10^{-33} g

$$m_0 = 10; 10^{-27}; 10^{-30}; \frac{1}{2} \cdot 10^{-30}; \frac{1}{3} \cdot 10^{-30}; \frac{1}{4} \cdot 10^{-30}; \frac{1}{5} \cdot 10^{-30}; \frac{1}{6} \cdot 10^{-30}; \frac{1}{7} \cdot 10^{-30}; \frac{1}{8} \cdot 10^{-30}; \\ 10^{-31}; 10^{-33}$$

e i seguenti valori (unità CGS):

$$a = 10 \quad ; \quad \langle \mathcal{U}_x \rangle_0 = 10^6 \quad ; \quad d = 10^{-1} \quad ; \quad l = 1$$

cosicché, essendo $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$ e $p_x = m_0 \mathcal{U}_x$, si ottiene

$$K = \frac{\hbar a}{\langle p_x \rangle_0 d^2} = \frac{1,054 \cdot 10^{-27} \cdot 10}{m_0 10^6 \cdot 10^{-2}} \approx \frac{10^{-30}}{m_0}$$

La costante $2|A|^2$ è stata posta per semplicità uguale a 1.

Dalle figure risulta che la densità di probabilità della posizione che viene fornita dalla Meccanica di Schrödinger per ogni particella inviata sulla superficie rivelatrice tende alla previsione newtoniana (pur senza mai uguagliarla, perché per $y = 0$ è $\psi^* \psi \neq 0$) fino a che la massa si mantiene maggiore o uguale a 10^{-30} g; al di sotto di questo valore la densità di probabilità prende via via la forma di una figura di interferenza che, conviene sottolinearlo, si forma anche se verso lo schermo dotato di fessure vengono lanciate particelle ad una ad una. In questo caso la figura di interferenza diviene visibile in modo sempre più netto al crescere del numero delle particelle.

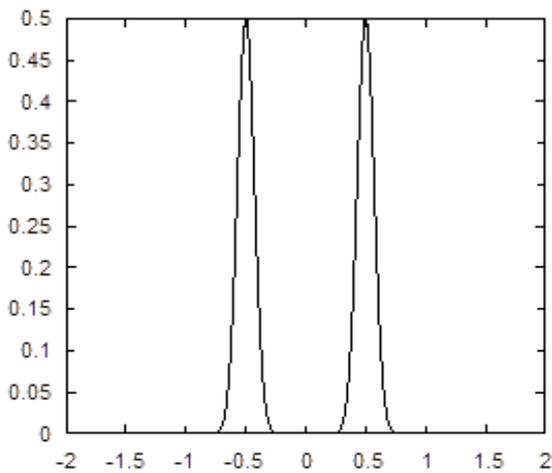


Fig.1; massa=10

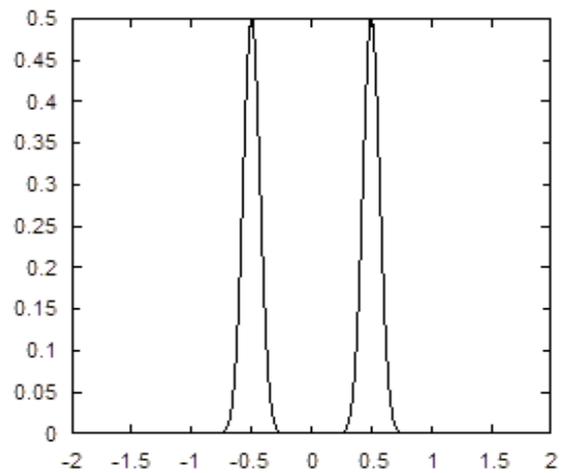


Fig.2; massa = 10^{^-27}

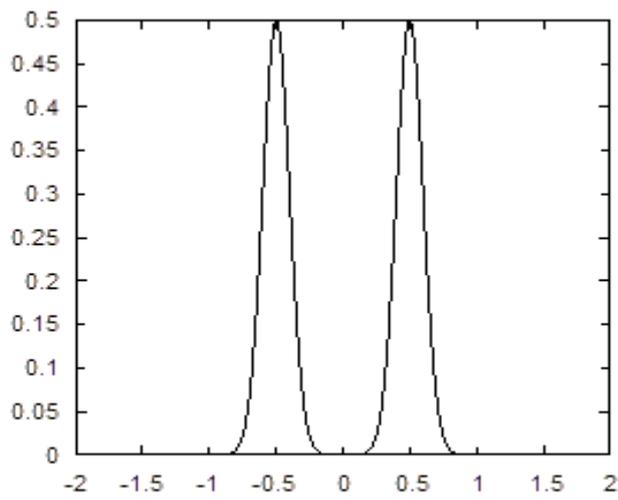


Fig.3; massa = $10^{(-30)}$

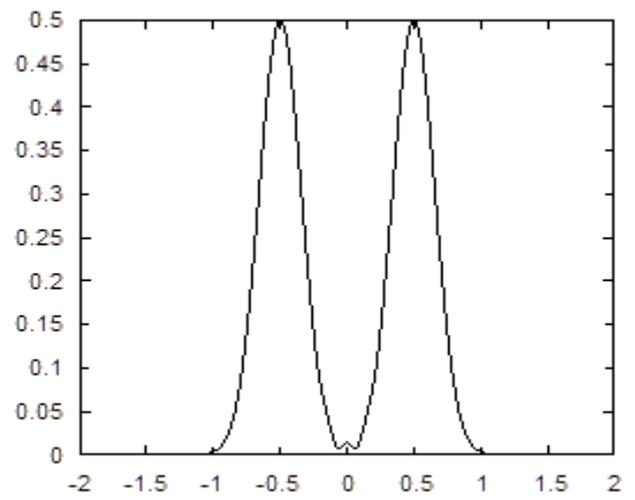


Fig.4; massa = $(1/2)*10^{(-30)}$

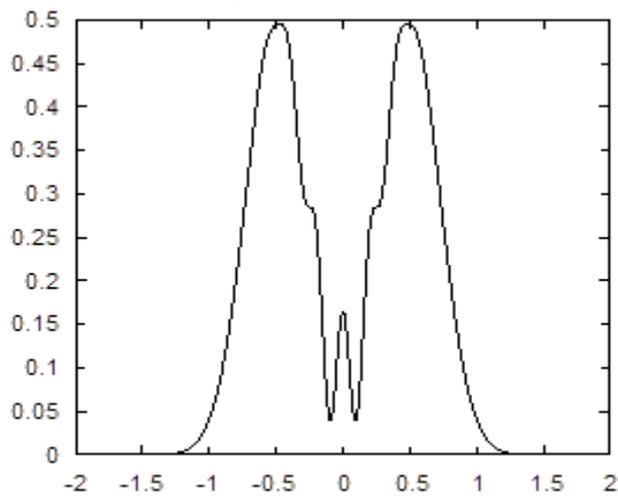


Fig.5; massa = $(1/3)*10^{(-30)}$

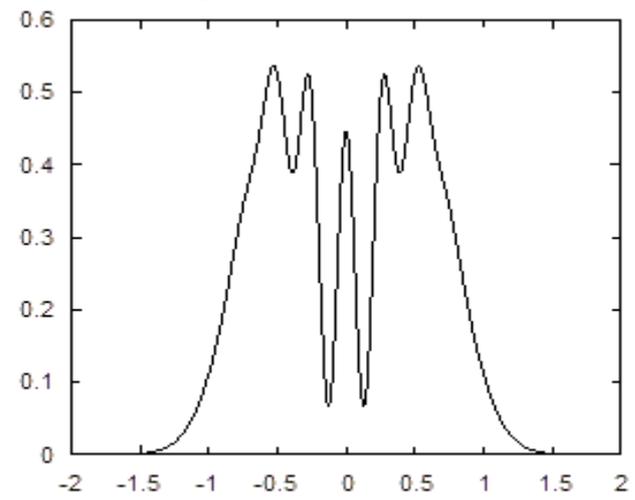


Fig.6; massa = $(1/4)*10^{(-30)}$

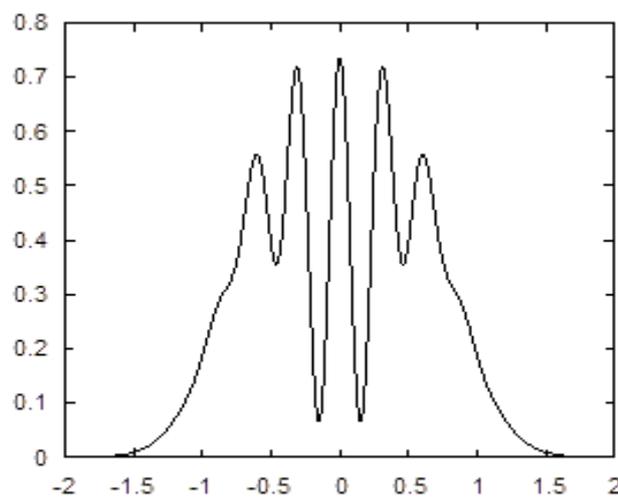


Fig.7; massa = $(1/5)*10^{(-30)}$

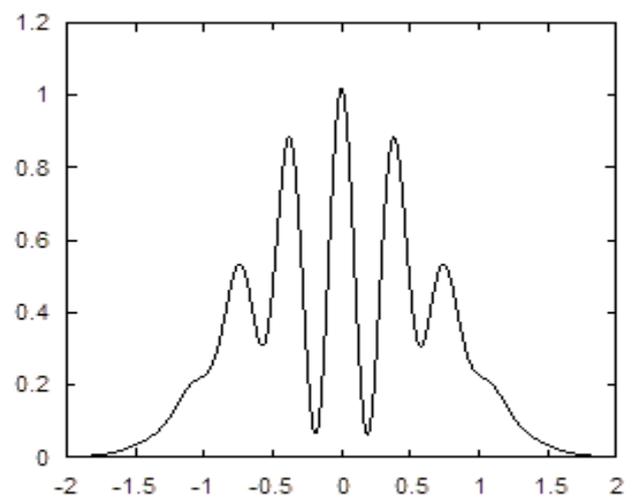


Fig.8; massa = $(1/6)*10^{(-30)}$

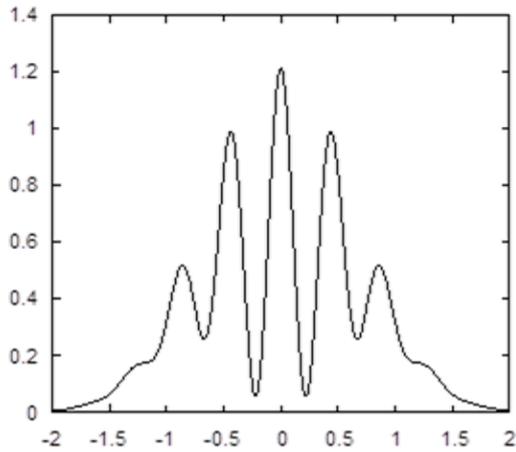


Fig.9; massa = $(1/7) \cdot 10^{(-30)}$

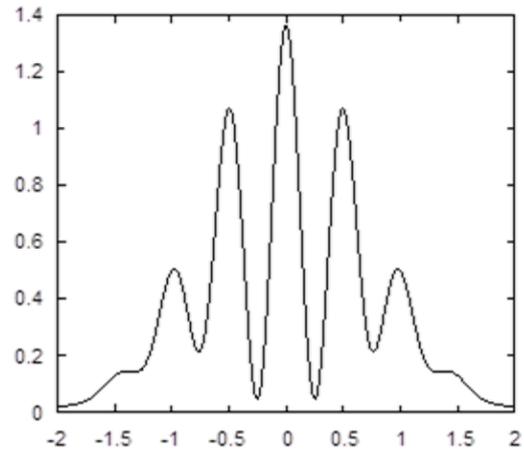


Fig.10; massa = $(1/8) \cdot 10^{(-30)}$

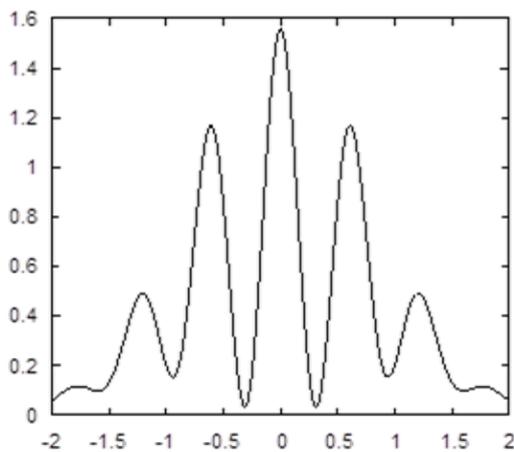


Fig.11; massa = $10^{(-31)}$

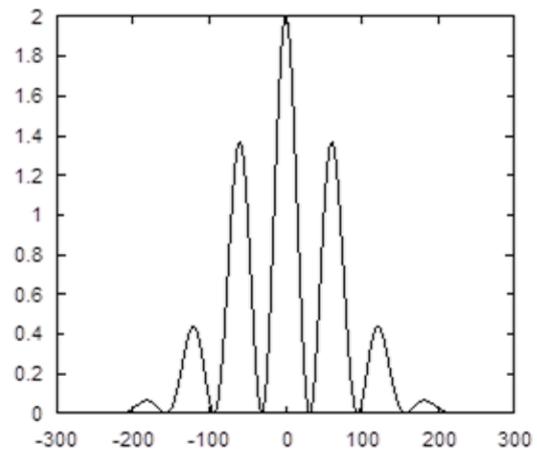


Fig.12; massa = $10^{(-33)}$

Conviene sottolineare che la Meccanica di Schrödinger, poiché non si interessa allo stato meccanico dei sistemi fisici che descrive, non fornisce alcuna informazione sui percorsi delle particelle, e in particolare non permette di sapere attraverso quale fessura ogni particella passa.

Se a valle dello schermo S e in prossimità di ogni fessura poniamo un rivelatore che segnali attraverso quale fessura ogni particella è passata, dovremo tener conto del fatto che le particelle possono essere segnalate perché interagiscono coi rivelatori, e questa interazione deve comparire nell'hamiltoniano che è presente nell'equazione di Schrödinger descrittiva del fenomeno.

In conseguenza di ciò si avrà una variazione della distribuzione di densità di probabilità a valle dello schermo dotato di fessure rispetto al caso in cui non sono presenti rivelatori: le figure di interferenza potranno così essere sensibilmente modificate.

Appendice A

TRASFORMAZIONE DI FOURIER

Consideriamo nello spazio tridimensionale una coppia di funzioni, in generale complesse,

$$\psi(\bar{x}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \varphi(\bar{y}) \quad (\text{A1})$$

rappresentative della trasformata e della antitrasformata di Fourier

$$\psi(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \varphi(\bar{y}) e^{i\bar{y}\cdot\bar{x}} d\bar{y} \quad (\text{A2})$$

$$\varphi(\bar{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \psi(\bar{x}) e^{-i\bar{y}\cdot\bar{x}} d\bar{x} \quad (\text{A3})$$

dove i simboli vettoriali usati stanno a indicare:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \varphi(y_1, y_2, y_3) e^{i(y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3)} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (\text{A4})$$

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \psi(x_1, x_2, x_3) e^{-i(y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (\text{A5})$$

e dove l'integrazione si intende estesa da $-\infty$ a $+\infty$.

La (A1) è detta *coppia di funzioni coniugate secondo Fourier* o *Fourier-coniugate*.

Ci proponiamo di determinare alcune proprietà di una coppia di funzioni Fourier-coniugate, proprietà alle quali la Meccanica quantistica si interessa perché ad esse possono essere attribuiti importanti significati fisici.

In analogia con la definizione di “centro di massa” di una certa distribuzione di materia introduciamo il concetto di “centro” o “valore medio” del dominio di definizione di ciascuna delle funzioni φ e ψ , assumendo come analoghe della “densità di massa” le quantità $\psi^*\psi$ e $\varphi^*\varphi$.

Convienne tener presente che il concetto di valore medio nei domini di definizione delle densità $\psi^*\psi$ e $\varphi^*\varphi$ può ricevere una interpretazione fisica se $\psi^*\psi$ e $\varphi^*\varphi$ sono sensibilmente diverse da zero in un intervallo limitato dei rispettivi domini e pressoché nulle fuori da tale intervallo.

Di questa ipotesi si terrà conto nelle applicazioni che verranno fatte di quanto si dimostra in questa Appendice A.

Il valor medio del dominio di definizione della $\psi^*\psi$ è espresso da

$$\langle \bar{x} \rangle = \frac{\int \bar{x} \psi^*(\bar{x}) \psi(\bar{x}) d\bar{x}}{\int \psi^*(\bar{x}) \psi(\bar{x}) d\bar{x}} \quad (\text{A6})$$

e analogamente quello del dominio della $\varphi^*\varphi$ è:

$$\langle \bar{y} \rangle = \frac{\int \bar{y} \varphi^*(\bar{y}) \varphi(\bar{y}) d\bar{y}}{\int \varphi^*(\bar{y}) \varphi(\bar{y}) d\bar{y}} \quad (\text{A7})$$

dove i simboli vettoriali stanno a indicare (nello spazio tridimensionale):

$$\langle x_k \rangle = \frac{\int x_k \psi^*(\bar{x}) \psi(\bar{x}) dx_1 dx_2 dx_3}{\int \psi^*(\bar{x}) \psi(\bar{x}) dx_1 dx_2 dx_3} \quad ; \quad k = 1, 2, 3$$

$$\langle y_k \rangle = \frac{\int y_k \varphi^*(\bar{y}) \varphi(\bar{y}) dy_1 dy_2 dy_3}{\int \varphi^*(\bar{y}) \varphi(\bar{y}) dy_1 dy_2 dy_3} \quad ; \quad k = 1, 2, 3$$

Notiamo i diversi significati di \bar{x} : se compare nell'argomento di una funzione indica la terna delle variabili indipendenti x_1, x_2, x_3 ; se è usato in $d\bar{x}$ significa $dx_1 dx_2 dx_3$; se compare in un integrando o è isolato sta a indicare una terna di equazioni rispettivamente in x_1, x_2, x_3 . Considerazioni analoghe valgono per la \bar{y} .

Le (A6) e (A7), facendo uso delle (A2) e (A3), si possono riscrivere in un altro modo. Infatti osserviamo che

$$\begin{aligned} \langle \bar{x} \rangle &= \frac{\int \bar{x} \left[\int \varphi^*(\bar{y}') e^{-i\bar{y}' \cdot \bar{x}} d\bar{y}' \int \varphi(\bar{y}) e^{i\bar{y} \cdot \bar{x}} d\bar{y} \right] d\bar{x}}{\int \left[\int \varphi^*(\bar{y}') e^{-i\bar{y}' \cdot \bar{x}} d\bar{y}' \int \varphi(\bar{y}) e^{i\bar{y} \cdot \bar{x}} d\bar{y} \right] d\bar{x}} \\ &= \frac{\int \bar{x} \left[\iint \varphi^*(\bar{y}') \varphi(\bar{y}) e^{i(\bar{y}-\bar{y}') \cdot \bar{x}} d\bar{y} d\bar{y}' \right] d\bar{x}}{\int \left[\iint \varphi^*(\bar{y}') \varphi(\bar{y}) e^{i(\bar{y}-\bar{y}') \cdot \bar{x}} d\bar{y} d\bar{y}' \right] d\bar{x}} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \langle \bar{x} \rangle &= \frac{\iint \varphi^*(\bar{y}') \varphi(\bar{y}) \left[\int \bar{x} e^{i(\bar{y}-\bar{y}') \cdot \bar{x}} d\bar{x} \right] d\bar{y} d\bar{y}'}{\iint \varphi^*(\bar{y}') \varphi(\bar{y}) \left[\int e^{i(\bar{y}-\bar{y}') \cdot \bar{x}} d\bar{x} \right] d\bar{y} d\bar{y}'} \\ &= \frac{\iint \varphi^*(\bar{y}') \varphi(\bar{y}) \left[-i \int i\bar{x} e^{i(\bar{y}-\bar{y}') \cdot \bar{x}} d\bar{x} \right] d\bar{y} d\bar{y}'}{\iint \varphi^*(\bar{y}') \varphi(\bar{y}) \left[\int e^{i(\bar{y}-\bar{y}') \cdot \bar{x}} d\bar{x} \right] d\bar{y} d\bar{y}'} \end{aligned}$$

Ora occorre ricordare la seguente rappresentazione della “funzione” δ di Dirac

$$\delta(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\xi}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\xi}) \cdot \bar{k}} d\bar{k} \quad (\text{A8})$$

dove $\delta(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\xi}) = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \delta(x_3 - \xi_3)$.

Notiamo anche le proprietà di δ

$$\int_{\tau} f(\overline{\mathcal{R}}) \delta(\overline{\mathcal{R}} - \overline{\xi}) d\overline{\mathcal{R}} = f(\overline{\xi}) \quad (\text{A9})$$

$$\frac{\partial^n \delta(x_j - \xi_j)}{\partial x_j^n} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (ik_j)^n e^{i(\overline{\mathcal{R}} - \overline{\xi}) \cdot \overline{k}} d\overline{k} \quad (\text{A10})$$

$$\int f(\overline{\mathcal{R}}) \frac{\partial^n \delta(x_j - \xi_j)}{\partial x_j^n} d\overline{\mathcal{R}} = (-1)^n \left. \frac{\partial^n f}{\partial x_j^n} \right|_{x_j = \xi_j} \quad (\text{A11})$$

cosicché, per la (A10)

$$\langle \overline{x} \rangle = \frac{- \iint \varphi^*(\overline{y}') \varphi(\overline{y}) i \nabla_y \delta(\overline{y} - \overline{y}') d\overline{y} d\overline{y}'}{\iint \varphi^*(\overline{y}') \varphi(\overline{y}) \delta(\overline{y} - \overline{y}') d\overline{y} d\overline{y}'} = \frac{- \int \varphi^*(\overline{y}') \left[\int \varphi(\overline{y}) i \nabla_y \delta(\overline{y} - \overline{y}') d\overline{y} \right] d\overline{y}'}{\int \varphi^*(\overline{y}) \varphi(\overline{y}) d\overline{y}}$$

da cui, per la (A11)

$$\langle \overline{x} \rangle = \frac{\int \varphi^*(\overline{y}') i \nabla_y \varphi(\overline{y}) |_{\overline{y} = \overline{y}'} d\overline{y}'}{\int \varphi^*(\overline{y}) \varphi(\overline{y}) d\overline{y}}$$

ovvero, eliminando in \overline{y}' l'apice ormai inutile e richiamando, per confronto, la (A6)

$$\langle \overline{x} \rangle = \frac{\int \overline{x} \psi^*(\overline{x}) \psi(\overline{x}) d\overline{x}}{\int \psi^*(\overline{x}) \psi(\overline{x}) d\overline{x}} = \frac{\int \varphi^*(\overline{y}) i \nabla_y \varphi(\overline{y}) d\overline{y}}{\int \varphi^*(\overline{y}) \varphi(\overline{y}) d\overline{y}} \quad (\text{A12})$$

Con procedimento analogo si trova, richiamando per confronto la (A7)

$$\langle \overline{y} \rangle = \frac{\int \overline{y} \varphi^*(\overline{y}) \varphi(\overline{y}) d\overline{y}}{\int \varphi^*(\overline{y}) \varphi(\overline{y}) d\overline{y}} = \frac{\int \psi^*(\overline{x}) (-i \nabla_x) \psi(\overline{x}) d\overline{x}}{\int \psi^*(\overline{x}) \psi(\overline{x}) d\overline{x}} \quad (\text{A13})$$

Notiamo che dalle (A2) e (A3) si ricava

$$\int \varphi^*(\overline{y}) \varphi(\overline{y}) d\overline{y} = \int \psi^*(\overline{x}) \psi(\overline{x}) d\overline{x} \quad (\text{A14})$$

Con ragionamenti analoghi e facendo ancora riferimento alle proprietà della funzione di Dirac si trova che

$$\langle x_k^n \rangle = \frac{\int x_k^n \psi^*(\overline{x}) \psi(\overline{x}) d\overline{x}}{\int \psi^*(\overline{x}) \psi(\overline{x}) d\overline{x}} = \frac{\int \varphi^*(\overline{y}) \left(i \frac{\partial}{\partial y_k} \right)^n \varphi(\overline{y}) d\overline{y}}{\int \varphi^*(\overline{y}) \varphi(\overline{y}) d\overline{y}} \quad (\text{A15})$$

$$\langle y_k^n \rangle = \frac{\int y_k^n \varphi^*(\bar{y}) \varphi(\bar{y}) d\bar{y}}{\int \varphi^*(\bar{y}) \varphi(\bar{y}) d\bar{y}} = \frac{\int \psi^*(\bar{x}) \left(-i \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^n \psi(\bar{x}) d\bar{x}}{\int \psi^*(\bar{x}) \psi(\bar{x}) d\bar{x}} \quad (\text{A16})$$

È facile concludere, a questo punto, che il valor medio di una qualunque funzione $F(\bar{x})$ o $F(\bar{y})$ sviluppabile in serie di Taylor può essere espresso così:

$$\langle F(\bar{x}) \rangle = \frac{\int \varphi^*(\bar{y}) F(i\nabla_y) \varphi(\bar{y}) d\bar{y}}{\int \varphi^* \varphi d\bar{y}} \quad ; \quad \langle F(\bar{y}) \rangle = \frac{\int \psi^*(\bar{x}) F(-i\nabla_x) \psi(\bar{x}) d\bar{x}}{\int \psi^* \psi d\bar{x}} \quad (\text{A17})$$

Introduciamo ora le varianze o scarti quadratici medi

$$(\Delta x_k)^2 = \langle (x_k - \langle x_k \rangle)^2 \rangle = \frac{\int (x_k - \langle x_k \rangle)^2 \psi^* \psi d\bar{x}}{\int \psi^* \psi d\bar{x}} \quad (\text{A18})$$

$$(\Delta y_k)^2 = \langle (y_k - \langle y_k \rangle)^2 \rangle = \frac{\int (y_k - \langle y_k \rangle)^2 \varphi^* \varphi d\bar{y}}{\int \varphi^* \varphi d\bar{y}} \quad (\text{A19})$$

e le associate deviazioni standard

$$\Delta x_k = \sqrt{\langle (x_k - \langle x_k \rangle)^2 \rangle} \quad ; \quad \Delta y_k = \sqrt{\langle (y_k - \langle y_k \rangle)^2 \rangle} \quad (\text{A20})$$

Conviene effettuare il cambiamento di variabile

$$\bar{X} = \bar{x} - \langle \bar{x} \rangle \quad ; \quad \bar{Y} = \bar{y} - \langle \bar{y} \rangle \quad (\text{A21})$$

dove

$$\langle \bar{X} \rangle = \langle \bar{Y} \rangle = 0 \quad (\text{A22})$$

Inserendo nelle (A2) e (A3) le \bar{x} e \bar{y} ricavate dalle (A21) cioè

$$\bar{x} = \bar{X} + \langle \bar{x} \rangle \quad ; \quad \bar{y} = \bar{Y} + \langle \bar{y} \rangle \quad (\text{A23})$$

si ottiene

$$\psi(\bar{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \varphi(\bar{Y}) e^{i(\bar{Y} + \langle \bar{y} \rangle) \cdot (\bar{X} + \langle \bar{x} \rangle)} d\bar{Y} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\langle \bar{y} \rangle \cdot (\bar{X} + \langle \bar{x} \rangle)} \int \varphi(\bar{Y}) e^{i\bar{Y} \cdot \langle \bar{x} \rangle} e^{i\bar{X} \cdot \bar{Y}} d\bar{Y}$$

$$\varphi(\bar{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \psi(\bar{X}) e^{-i(\bar{Y} + \langle \bar{y} \rangle) \cdot (\bar{X} + \langle \bar{x} \rangle)} d\bar{X} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\langle \bar{x} \rangle \cdot (\bar{Y} + \langle \bar{y} \rangle)} \int \psi(\bar{X}) e^{-i\bar{X} \cdot \langle \bar{y} \rangle} e^{-i\bar{X} \cdot \bar{Y}} d\bar{X}$$

Notiamo che $\psi(\bar{X})$ e $\varphi(\bar{Y})$ non sono funzioni Fourier-coniugate. Se però le riscriviamo così

$$\psi(\bar{X}) e^{-i\langle \bar{y} \rangle \cdot (\bar{X} + \langle \bar{x} \rangle)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \varphi(\bar{Y}) e^{i\bar{Y} \cdot \langle \bar{x} \rangle} e^{i\bar{X} \cdot \bar{Y}} d\bar{Y}$$

$$\varphi(\bar{Y})e^{i\langle\bar{x}\rangle\cdot\bar{Y}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \psi(\bar{X})e^{-i(\bar{X}+\langle\bar{x}\rangle)\cdot\langle\bar{y}\rangle} e^{-i\bar{X}\cdot\bar{Y}} d\bar{X}$$

otteniamo una coppia di funzioni Fourier-coniugate

$$\psi(\bar{X})e^{-i\langle\bar{y}\rangle\cdot(\bar{X}+\langle\bar{x}\rangle)} \xleftrightarrow{\text{F}} \varphi(\bar{Y})e^{i\langle\bar{x}\rangle\cdot\bar{Y}} \quad (\text{A24})$$

che, introducendo una nuova coppia

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{X}) &= \psi(\bar{X})e^{-i\langle\bar{y}\rangle\cdot(\bar{X}+\langle\bar{x}\rangle)} \\ \Phi(\bar{Y}) &= \varphi(\bar{Y})e^{i\langle\bar{x}\rangle\cdot\bar{Y}} \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

possiamo scrivere così

$$\Psi(\bar{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \Phi(\bar{Y})e^{i\bar{X}\cdot\bar{Y}} d\bar{Y} \quad ; \quad \Phi(\bar{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \Psi(\bar{X})e^{-i\bar{X}\cdot\bar{Y}} d\bar{X} \quad (\text{A26})$$

e dunque

$$\Psi(\bar{X}) \xleftrightarrow{\text{F}} \Phi(\bar{Y})$$

In virtù delle (A20) e (A21) si hanno le nuove espressioni degli scarti quadratici medi

$$(\Delta x_k)^2 = \langle X_k^2 \rangle \quad ; \quad (\Delta y_k)^2 = \langle Y_k^2 \rangle \quad (\text{A27})$$

e delle deviazioni standard

$$\Delta x_k = \sqrt{\langle X_k^2 \rangle} \quad ; \quad \Delta y_k = \sqrt{\langle Y_k^2 \rangle} \quad (\text{A28})$$

e anche

$$\Psi^*\Psi = \psi^*\psi \quad ; \quad \Phi^*\Phi = \varphi^*\varphi \quad (\text{A29})$$

cosicché alla (A15) e (A16) corrispondono le

$$\langle X_k^n \rangle = \frac{\int X_k^n \Psi^* \Psi d\bar{X}}{\int \Psi^* \Psi d\bar{X}} = \frac{\int \Phi^* \left(i \frac{\partial}{\partial Y_k} \right)^n \Phi d\bar{Y}}{\int \Phi^* \Phi d\bar{Y}} \quad (\text{A30})$$

$$\langle Y_k^n \rangle = \frac{\int Y_k^n \Phi^* \Phi d\bar{Y}}{\int \Phi^* \Phi d\bar{Y}} = \frac{\int \Psi^* \left(-i \frac{\partial}{\partial X_k} \right)^n \Psi d\bar{X}}{\int \Psi^* \Psi d\bar{X}} \quad (\text{A31})$$

Termina qui la fase preparatoria alla presentazione di una importante proprietà delle funzioni Fourier-coniugate di cui ora ci occuperemo.

* * *

Consideriamo l'espressione certamente non negativa

$$\left| \frac{X_{\bar{k}}}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} \right|^2 \geq 0 \quad (\text{A32})$$

dove il soprassegno sull'indice ripetuto k sta a significare che non vi è somma su k .
Sviluppiamo la (A32):

$$\begin{aligned} \left| \frac{X_{\bar{k}}}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} \right|^2 &= \left(\frac{X_{\bar{k}}}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \Psi^* + \frac{\partial \Psi^*}{\partial X_{\bar{k}}} \right) \left(\frac{X_{\bar{k}}}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} \right) \\ &= \frac{X_{\bar{k}}^2}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle^2} \Psi^* \Psi + \frac{X_{\bar{k}}}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial X_{\bar{k}}} \frac{X_{\bar{k}}}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \Psi + \frac{\partial \Psi^*}{\partial X_{\bar{k}}} \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} \\ &= \frac{X_{\bar{k}}^2}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle^2} \Psi^* \Psi + \frac{1}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \frac{\partial}{\partial X_{\bar{k}}} (X_{\bar{k}} \Psi^* \Psi) - \frac{1}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \Psi^* \Psi + \frac{\partial \Psi^*}{\partial X_{\bar{k}}} \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} \\ &= \frac{X_{\bar{k}}^2 - 2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle^2} \Psi^* \Psi + \frac{1}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \frac{\partial}{\partial X_{\bar{k}}} (X_{\bar{k}} \Psi^* \Psi) + \frac{\partial \Psi^*}{\partial X_{\bar{k}}} \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} \geq 0 \end{aligned}$$

Ora integriamo rispetto a $\bar{X} \equiv X_1, X_2, X_3$ entro un volume τ scelto in modo che la Ψ si annulli sulla sua superficie che indichiamo con σ . Si ha così:

$$\frac{1}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle^2} \int_{\tau} (X_{\bar{k}}^2 - 2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle) \Psi^* \Psi d\bar{X} + \frac{1}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial X_{\bar{k}}} (X_{\bar{k}} \Psi^* \Psi) d\bar{X} + \int_{\tau} \frac{\partial \Psi^*}{\partial X_{\bar{k}}} \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} d\bar{X} \geq 0 \quad (\text{A33})$$

Tenendo presente il Teorema di Gauss segue

$$\frac{1}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle^2} \int_{\tau} X_{\bar{k}}^2 \Psi^* \Psi d\bar{X} - \frac{1}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \int_{\tau} \Psi^* \Psi d\bar{X} + \frac{1}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \int_{\sigma} X_{\bar{k}} \Psi^* \Psi n^{\bar{k}} d\sigma + \int_{\tau} \frac{\partial \Psi^*}{\partial X_{\bar{k}}} \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} d\bar{X} \geq 0 \quad (\text{A34})$$

Notiamo che il primo integrale rappresenta, per la (A30), il valor medio di $X_{\bar{k}}^2$ moltiplicato per $\int_{\tau} \Psi^* \Psi d\bar{X}$; il terzo si annulla su σ cosicché rimane:

$$\frac{1}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle^2} \langle X_{\bar{k}}^2 \rangle \int_{\tau} \Psi^* \Psi d\bar{X} - \frac{1}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \int_{\tau} \Psi^* \Psi d\bar{X} + \int_{\tau} \frac{\partial \Psi^*}{\partial X_{\bar{k}}} \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} d\bar{X} \geq 0 \quad (\text{A35})$$

ovvero, semplificando il primo termine ed effettuando la sottrazione

$$-\frac{1}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \int_{\tau} \Psi^* \Psi d\bar{X} + \int_{\tau} \frac{\partial \Psi^*}{\partial X_{\bar{k}}} \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} d\bar{X} \geq 0 \quad (\text{A36})$$

Consideriamo il secondo integrale della (A36) e osserviamo che si può scrivere

$$\int_{\tau} \frac{\partial \Psi^*}{\partial X_{\bar{k}}} \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} d\bar{X} = \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial X_{\bar{k}}} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} \right) d\bar{X} - \int_{\tau} \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X_{\bar{k}}^2} d\bar{X}$$

Inseriamo nella (A36) dopo avere applicato il Teorema di Gauss al primo integrale a membro destro

$$-\frac{1}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \int_{\tau} \Psi^* \Psi d\bar{X} + \int_{\sigma} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial X_{\bar{k}}} n_{\bar{k}} d\sigma - \int_{\tau} \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X_{\bar{k}}^2} d\bar{X} \geq 0 \quad (\text{A37})$$

Il secondo integrale è nullo perché Ψ^* è nulla su σ ; il terzo integrale, ricordando la (A31) per $n = 2$, è esprimibile così:

$$\int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X_{\bar{k}}^2} d\bar{X} = - \int_{\tau} \Psi^* \left(-i \frac{\partial}{\partial X_{\bar{k}}} \right)^2 \Psi d\bar{X} = -\langle Y_{\bar{k}}^2 \rangle \int_{\tau} \Psi^* \Psi d\bar{X}$$

La (A37) diviene quindi

$$\left(-\frac{1}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} + \langle Y_{\bar{k}}^2 \rangle \right) \int_{\tau} \Psi^* \Psi d\bar{X} \geq 0$$

ovvero, essendo $\int_{\tau} \Psi^* \Psi d\bar{X} = 1$

$$-\frac{1}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} + \langle Y_{\bar{k}}^2 \rangle \geq 0$$

da cui

$$\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle \langle Y_{\bar{k}}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \quad (\text{A38})$$

Ricordando la (A27) e le (A18) e (A19) si può scrivere per le varianze del dominio di definizione della ψ e della φ :

$$(\Delta x_{\bar{k}})^2 (\Delta y_{\bar{k}})^2 \geq \frac{1}{4} \quad ; \quad \langle (x_{\bar{k}} - \langle x_{\bar{k}} \rangle)^2 \rangle \langle (y_{\bar{k}} - \langle y_{\bar{k}} \rangle)^2 \rangle \geq \frac{1}{4}$$

oppure, poiché

$$\begin{aligned} \langle (x_{\bar{k}} - \langle x_{\bar{k}} \rangle)^2 \rangle &= \langle x_{\bar{k}}^2 + \langle x_{\bar{k}} \rangle^2 - 2x_{\bar{k}} \langle x_{\bar{k}} \rangle \rangle \\ &= \langle x_{\bar{k}}^2 \rangle + \langle x_{\bar{k}} \rangle^2 - 2\langle x_{\bar{k}} \rangle \langle x_{\bar{k}} \rangle \\ &= \langle x_{\bar{k}}^2 \rangle - \langle x_{\bar{k}} \rangle^2 \end{aligned}$$

e analogamente $\langle (y_{\bar{k}} - \langle y_{\bar{k}} \rangle)^2 \rangle = \langle y_{\bar{k}}^2 \rangle - \langle y_{\bar{k}} \rangle^2$, si può scrivere

$$(\Delta x_{\bar{k}})^2 (\Delta y_{\bar{k}})^2 \geq \frac{1}{4} \quad ; \quad (\langle x_{\bar{k}}^2 \rangle - \langle x_{\bar{k}} \rangle^2) (\langle y_{\bar{k}}^2 \rangle - \langle y_{\bar{k}} \rangle^2) \geq \frac{1}{4}$$

mentre per le deviazioni standard si ha

$$\Delta x_{\bar{k}} \Delta y_{\bar{k}} \geq \frac{1}{2} \quad ; \quad \sqrt{(\langle x_{\bar{k}}^2 \rangle - \langle x_{\bar{k}} \rangle^2) (\langle y_{\bar{k}}^2 \rangle - \langle y_{\bar{k}} \rangle^2)} \geq \frac{1}{2} \quad (\text{A39})$$

La (A39) è la proprietà delle funzioni Fourier-coniugate di cui ci eravamo proposti di mostrare l'esistenza.

Essa è l'espressione di un vincolo che lega Δx_k e Δy_k : se $\psi\psi^*$ è addensato attorno al valor medio del dominio di definizione, allora $\varphi\varphi^*$ è disperso; viceversa, se $\psi\psi^*$ è disperso, allora $\varphi\varphi^*$ è addensato attorno al valor medio del dominio di definizione della $\varphi\varphi^*$.

Ad esempio, se $\psi\psi^*$ tende a divenire una "funzione impulsiva" del tipo di Dirac, allora $\varphi\varphi^*$ tende a diventare una funzione uniforme.

In altre parole, se $\Delta x_k \rightarrow 0$, allora $\Delta y_k \rightarrow \infty$ e viceversa, in modo tale che la (A39) sia sempre verificata.

* * *

È interessante notare che la quantità a membro sinistro della (A32) assume il suo valore minimo, che è lo zero, quando

$$\frac{X_{\bar{k}}}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \Psi(\bar{X}) = -\frac{\partial \Psi(\bar{X})}{\partial X_{\bar{k}}} \quad (\text{A40})$$

e di conseguenza la (A38) diviene

$$\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle \langle Y_{\bar{k}}^2 \rangle = \frac{1}{4} \quad (\text{A41})$$

La (A40) può essere integrata col metodo di separazione delle variabili ponendo $\Psi(\bar{X}) = \Psi_1(X_1)\Psi_2(X_2)\Psi_3(X_3)$ e si ottiene

$$\Psi_k(X_k) = C_k e^{-\frac{X_k^2}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}} \quad (\text{A42})$$

dove C_k è una costante di integrazione non dipendente da X_k che deve essere determinata imponendo che valga la (A41). Se allora assumiamo che sia

$$\int \Psi_k^* \Psi_{\bar{k}} dX_{\bar{k}} = A \quad (\text{A43})$$

dove A è una costante reale da definirsi in base a una qualche condizione da imporsi sull'integrale e teniamo conto del fatto che (v. eq. (A31))

$$\langle Y_k^2 \rangle = \frac{\int \Psi_k^*(X_k) \left(-\frac{\partial^2}{\partial X_{\bar{k}}^2} \Psi_{\bar{k}}(X_k) \right) dX_{\bar{k}}}{\int \Psi_k^* \Psi_{\bar{k}} dX_{\bar{k}}} = \frac{-\int \left\{ \frac{\partial}{\partial X_{\bar{k}}} \left(\Psi_k^* \frac{\partial \Psi_{\bar{k}}}{\partial X_{\bar{k}}} \right) - \frac{\partial \Psi_k^*}{\partial X_{\bar{k}}} \frac{\partial \Psi_{\bar{k}}}{\partial X_{\bar{k}}} \right\} dX_{\bar{k}}}{\int \Psi_k^* \Psi_{\bar{k}} dX_{\bar{k}}}$$

segue, per il Teorema di Gauss,

$$\langle Y_k^2 \rangle = \frac{\int \frac{\partial \Psi_k^*}{\partial X_{\bar{k}}} \frac{\partial \Psi_{\bar{k}}}{\partial X_{\bar{k}}} dX_{\bar{k}}}{\int \Psi_k^* \Psi_{\bar{k}} dX_{\bar{k}}}$$

da cui, tenendo presenti le (A42) e (A43)

$$\begin{aligned} \langle Y_k^2 \rangle &= \frac{1}{A} \int C_{\bar{k}}^* \frac{X_{\bar{k}}}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} e^{-\frac{X_{\bar{k}}^2}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}} C_{\bar{k}} \frac{X_{\bar{k}}}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} e^{-\frac{X_{\bar{k}}^2}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}} dX_{\bar{k}} \\ &= \frac{|C_{\bar{k}}|^2 \sqrt{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}}{2A\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \int \frac{X_{\bar{k}}^2}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} e^{-\frac{X_{\bar{k}}^2}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}} d\frac{X_{\bar{k}}}{\sqrt{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}} \\ &= \frac{|C_{\bar{k}}|^2 \sqrt{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}}{2A\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \int \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi \quad ; \quad \xi = \frac{X_{\bar{k}}}{\sqrt{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}} \end{aligned}$$

Per effettuare l'integrazione occorre richiamare la funzione Γ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^m e^{-a\xi^2} d\xi = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{a^{\frac{m+1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)}{a^{\frac{m+1}{2}}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-1) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{m}{2}}}}{a^{\frac{m+1}{2}}}$$

e si ottiene così, essendo $m = 2$ e $a = 1$

$$\langle Y_k^2 \rangle = \frac{|C_{\bar{k}}|^2 \sqrt{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} \sqrt{\pi}}{2A\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} = \frac{|C_{\bar{k}}|^2 \sqrt{2\pi\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}}{4A\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}$$

e quindi, per la (A41):

$$\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle \frac{|C_{\bar{k}}|^2 \sqrt{2\pi\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}}{4A\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} = \frac{1}{4}$$

da cui

$$|C_k| = \frac{A^{1/2}}{(2\pi\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle)^{1/4}}$$

Assumendo per C_k una fase zero si ottiene infine dalla (A42)

$$\Psi_k(X_k) = \sqrt{\frac{A}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \langle X_{\bar{k}}^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}} e^{-\frac{X_{\bar{k}}^2}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}}$$

Notiamo che

$$\int \Psi_k^* \Psi_k dX_k = \frac{A}{\sqrt{2\pi\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}} \int e^{-\frac{X_{\bar{k}}^2}{2\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}} dX_{\bar{k}} = A$$

in accordo con la (A43). Si ha anche, per definizione di trasformata di Fourier:

$$\Phi_k(Y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi_k(X_k) e^{-iX_{\bar{k}}Y_{\bar{k}}} dX_{\bar{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{A}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \langle X_{\bar{k}}^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}} \int e^{\frac{X_{\bar{k}}^2}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle} - iX_{\bar{k}}Y_{\bar{k}}} dX_{\bar{k}}$$

Poiché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+2bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}}$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} \Phi_k(Y_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{A}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \langle X_{\bar{k}}^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}}} e^{\frac{i^2 Y_{\bar{k}}^2}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{4\pi A \langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}{2\pi(2\pi)^{\frac{1}{2}} \langle X_{\bar{k}}^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}} e^{-\frac{Y_{2\bar{k}}^2}{4\frac{1}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}}} = \sqrt{\frac{2A \langle X_{\bar{k}}^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}} e^{-\frac{Y_{2\bar{k}}^2}{4\frac{1}{4\langle X_{\bar{k}}^2 \rangle}}} \end{aligned}$$

Tenendo presente la (A41), da cui si ricava $2\langle X_k^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\langle Y_k^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}$, si può scrivere infine:

$$\Phi_k(Y_k) = \sqrt{\frac{A}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \langle Y_k^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}} e^{-\frac{Y_k^2}{4\langle Y_k^2 \rangle}}$$

Passando alle $\Psi(\bar{X}) = \Psi_1(X_1)\Psi_2(X_2)\Psi_3(X_3)$ e $\Phi(\bar{Y}) = \Phi(Y_1)\Phi(Y_2)\Phi(Y_3)$ si ottiene

$$\Psi(\bar{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \Phi(\bar{Y}) e^{i\bar{X}\cdot\bar{Y}} d\bar{Y} = \alpha e^{-\sum_k \frac{X_k^2}{4\langle X_k^2 \rangle}}$$

$$\Phi(\bar{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \Psi(\bar{X}) e^{-i\bar{X}\cdot\bar{Y}} d\bar{X} = \beta e^{-\sum_k \frac{Y_k^2}{4\langle Y_k^2 \rangle}}$$

con

$$\alpha = \sqrt{\frac{A^3}{(2\pi)^{3/2} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}}$$

e con analogo ragionamento

$$\beta = \sqrt{\frac{A^3}{(2\pi)^{3/2} \Delta y_1 \Delta y_2 \Delta y_3}}$$

Le $\Psi(\bar{X})$ e $\Phi(\bar{Y})$ sono una coppia di funzioni Fourier-coniugate per le quali vale la (A41). Tenendo conto delle (A25) si ottiene

$$\psi(\bar{x}) = \alpha e^{-\sum_k \frac{(x_k - \langle x_k \rangle)^2}{4(\Delta x_k)^2} + i\langle \bar{y} \rangle \cdot \bar{x}} \quad (\text{A44})$$

e anche

$$\varphi(\bar{y}) = \beta e^{-\sum_k \frac{(y_k - \langle y_k \rangle)^2}{4(\Delta y_k)^2} - i(\bar{y} - \langle \bar{y} \rangle) \cdot \langle \bar{x} \rangle} \quad (\text{A45})$$

In accordo con la (A41), le deviazioni standard dei domini di definizione della ψ e della φ soddisfano la relazione

$$\Delta x_k \Delta y_k = \frac{1}{2} \quad (\text{A46})$$

Appendice B

La funzione d'onda nelle coordinate $\psi(\overline{\mathcal{R}}, t)$ e la funzione d'onda nei momenti $\varphi(\overline{p}, t)$ sono, per ogni fissato istante t , Fourier-coniugate, cioè

$$\psi(\overline{\mathcal{R}}, t) = \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\overline{p}, t) e^{i\frac{\overline{p}}{\hbar} \cdot \overline{\mathcal{R}}} d\overline{p} \quad ; \quad \overline{\mathcal{R}} \equiv x, y, z \quad ; \quad [\psi] = [\text{lunghezza}]^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{B1})$$

$$\varphi(\overline{p}, t) = \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\overline{\mathcal{R}}, t) e^{-i\frac{\overline{p}}{\hbar} \cdot \overline{\mathcal{R}}} d\overline{\mathcal{R}} \quad ; \quad \overline{p} \equiv p_x, p_y, p_z \quad ; \quad [\varphi] = [\text{momento}]^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{B2})$$

in accordo con le (A2) e (A3) dell'Appendice A se in esse poniamo $\overline{x} = \overline{\mathcal{R}}$ e $\overline{y} = \overline{p}/\hbar$ cosicché $d\overline{y} = d\overline{p}/\hbar^3$ (la costante $1/h^3$ è stata ripartita fra trasformata ($1/h^{\frac{3}{2}}$) e antitrasformata ($1/h^{\frac{3}{2}}$), in analogia con quanto è stato fatto con la costante $1/(2\pi)^3$ nelle (A2) e (A3)).

Per rendercene conto riprendiamo l'equazione di Schrödinger nelle coordinate espressa dalla (1) dell'Introduzione:

$$\frac{(-i\hbar\nabla_{\mathcal{R}})^2}{2m_0} \psi + \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}})\psi - i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \quad (\text{B3})$$

Moltiplichiamo per $e^{-i\frac{\overline{p}}{\hbar} \cdot \overline{\mathcal{R}}}$ e integriamo rispetto a $\overline{\mathcal{R}}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\overline{p}}{\hbar} \cdot \overline{\mathcal{R}}} \frac{(-i\hbar\nabla_{\mathcal{R}})^2}{2m_0} \psi d\overline{\mathcal{R}} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\overline{p}}{\hbar} \cdot \overline{\mathcal{R}}} \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}})\psi d\overline{\mathcal{R}} - i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\overline{p}}{\hbar} \cdot \overline{\mathcal{R}}} \frac{\partial\psi}{\partial t} d\overline{\mathcal{R}} = 0 \quad (\text{B4})$$

Teniamo ora presente la (C1) dell'Appendice C che riscriviamo così:

$$f(\nabla^2 g) = \nabla \cdot (f\nabla g) - (\nabla f) \cdot (\nabla g)$$

e integriamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\nabla^2 g) d\overline{\mathcal{R}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \cdot (f\nabla g) d\overline{\mathcal{R}} - \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla f) \cdot (\nabla g) d\overline{\mathcal{R}} \quad (\text{B5})$$

Assumendo

$$f = e^{-i\frac{\overline{p}}{\hbar} \cdot \overline{\mathcal{R}}} \quad ; \quad g = \psi \quad (\text{B6})$$

si può riscrivere il primo termine della (B4) nel modo seguente

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\overline{p}}{\hbar} \cdot \overline{\mathcal{R}}} \nabla_{\mathcal{R}}^2 \psi d\overline{\mathcal{R}} &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_{\mathcal{R}} \cdot (e^{-i\frac{\overline{p}}{\hbar} \cdot \overline{\mathcal{R}}} (\nabla_{\mathcal{R}} \psi)) d\overline{\mathcal{R}} + \\ &+ \frac{\hbar^2}{2m_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-i\frac{\overline{p}}{\hbar} \right) e^{-i\frac{\overline{p}}{\hbar} \cdot \overline{\mathcal{R}}} \cdot (\nabla_{\mathcal{R}} \psi) d\overline{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

- Applicando il teorema di Gauss al primo integrale a membro destro e supponendo che $e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} (\nabla_{\mathcal{R}}\psi)$ si annulli all'infinito rimane:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \nabla_{\mathcal{R}}^2 \psi d\bar{\mathcal{R}} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} (\nabla_{\mathcal{R}}\psi) d\bar{\mathcal{R}} \quad (\text{B7})$$

Ora osserviamo che si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\nabla g) d\bar{\mathcal{R}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla(fg) d\bar{\mathcal{R}} - \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla f)g d\bar{\mathcal{R}} \quad (\text{B8})$$

perciò nella (B7) il membro destro può essere riscritto così

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} (\nabla_{\mathcal{R}}\psi) d\bar{\mathcal{R}} = \\ & = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_{\mathcal{R}}(e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \psi) d\bar{\mathcal{R}} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\right) e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \psi d\bar{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

Applicando il teorema del gradiente

$$\int_{\tau} \nabla \varphi d\tau = \int_{\sigma} \varphi \bar{n} d\sigma$$

al primo integrale a membro destro e assumendo che la quantità $e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \psi$ si annulli all'infinito rimane

$$\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \nabla_{\mathcal{R}} \psi d\bar{\mathcal{R}} = \frac{p^2}{2m_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \psi d\bar{\mathcal{R}}$$

e quindi la (B7) diviene

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \nabla_{\mathcal{R}}^2 \psi d\bar{\mathcal{R}} = \frac{p^2}{2m_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \psi d\bar{\mathcal{R}} \quad (\text{B9})$$

Sostituendo la (B9) nella (B4) si ottiene

$$\frac{p^2}{2m_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \psi d\bar{\mathcal{R}} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}) \psi d\bar{\mathcal{R}} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \psi d\bar{\mathcal{R}} = 0 \quad (\text{B10})$$

A questo punto, dopo aver moltiplicato per $1/h^{3/2}$, è facile mostrare che questa è l'equazione di Schrödinger nei momenti. Infatti tenendo conto delle (B2) e (B1) si può scrivere:

$$\frac{p^2}{2m_0} \varphi(\bar{p}, t) + \frac{1}{h^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}) \frac{1}{h^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\bar{p}'}{\hbar}\cdot\bar{\mathcal{R}}} \varphi(\bar{p}', t) dp' d\bar{\mathcal{R}} - i\hbar \frac{\partial \varphi(\bar{p}, t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{B11})$$

ovvero

$$\frac{p^2}{2m_0}\varphi(\bar{p}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\bar{p}' - \bar{p}) \cdot \frac{\bar{\mathcal{R}}}{\hbar}} \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}) d\frac{\bar{\mathcal{R}}}{\hbar^3} \right) \varphi(\bar{p}', t) d\bar{p}' - i\hbar \frac{\partial \varphi(\bar{p}, t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{B12})$$

da cui, per la (A8) e la (A9) dell'Appendice A:

$$\frac{p^2}{2m_0}\varphi(\bar{p}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}(\bar{p}' - \bar{p}) \varphi(\bar{p}', t) d\bar{p}' - i\hbar \frac{\partial \varphi(\bar{p}, t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{B13})$$

Questa non è ancora l'equazione di Schrödinger nei momenti che conosciamo, ma supponiamo che $\mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}})$ sia esprimibile come serie di potenze:

$$\mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}) = a\bar{\mathcal{R}} + b\bar{\mathcal{R}}^2 + c\bar{\mathcal{R}}^3 + \dots \quad (\text{B14})$$

e inseriamo il primo termine di questo sviluppo nell'integrale a membro sinistro della (B12):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\bar{p}' - \bar{p}) \cdot \frac{\bar{\mathcal{R}}}{\hbar}} a\bar{\mathcal{R}} d\frac{\bar{\mathcal{R}}}{\hbar^3} \right) \varphi(\bar{p}', t) d\bar{p}' &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{-ia\hbar}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\bar{p}' - \bar{p}) \cdot \frac{\bar{\mathcal{R}}}{\hbar}} \frac{i}{\hbar} \bar{\mathcal{R}} d\frac{\bar{\mathcal{R}}}{\hbar^3} \right) \varphi(\bar{p}', t) d\bar{p}' \\ &= -ia\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \delta(\bar{p} - \bar{p}')}{\partial \bar{p}} \varphi(\bar{p}', t) d\bar{p}' \\ &= ia\hbar \frac{\partial \varphi(\bar{p}, t)}{\partial \bar{p}} \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della (A11) dell'Appendice A.

Ripetendo il procedimento per gli altri termini si trova

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\bar{p}' - \bar{p}) \cdot \frac{\bar{\mathcal{R}}}{\hbar}} \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}) d\frac{\bar{\mathcal{R}}}{\hbar^3} \right) \varphi(\bar{p}', t) d\bar{p}' = \left\{ ai\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{p}} + b \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \right)^2 + \dots \right\} \varphi(\bar{p}, t)$$

Confrontando le quantità entro parentesi graffe con la (B14) si vede che si può scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\bar{p}' - \bar{p}) \cdot \frac{\bar{\mathcal{R}}}{\hbar}} \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}) d\frac{\bar{\mathcal{R}}}{\hbar^3} \right) \varphi(\bar{p}', t) d\bar{p}' = \mathcal{V} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \right) \varphi(\bar{p}, t) \quad (\text{B15})$$

Sostituendo la (B15) nella (B12) si ottiene

$$\frac{p^2}{2m_0}\varphi(\bar{p}, t) + \mathcal{V}(i\hbar \nabla_{\mathcal{P}}) \varphi(\bar{p}, t) - i\hbar \frac{\partial \varphi(\bar{p}, t)}{\partial t} = 0 \quad ; \quad i\hbar \nabla_{\mathcal{P}} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \quad (\text{B16})$$

che coincide con l'equazione di Schrödinger nei momenti espressa dalla (2) dell'Introduzione, la quale appare così come una specializzazione della più generale equazione integrale/differenziale (B13).

Si è così verificato che

$$\psi(\bar{\mathcal{R}}, t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \varphi(\bar{p}, t) \quad (\text{B17})$$

Appendice C

Indichiamo con $\bar{a}(\bar{\mathcal{R}})$ un generico vettore e con $f(\bar{\mathcal{R}})$ e $g(\bar{\mathcal{R}})$ due grandezze scalari; con $\bar{\mathcal{R}} \equiv x, y, z$ viene indicato il vettore posizione di un punto nello spazio cartesiano ortogonale. Con $\bar{i}_n, n = 1, 2, 3$ viene indicata la terna ortonormale dei versori di base in questo spazio. Si ha:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (f\bar{a}) &= \bar{i}_k \partial_k \cdot (f a_m \bar{i}_m) \quad ; \quad \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} \\
 &= \partial_k (f a_m) \bar{i}_k \cdot \bar{i}_m \\
 &= \partial_k (f a_m) \delta_{km} \quad ; \quad \delta_{km} = \text{delta di Kronecker} \\
 &= \partial_k (f a_k) \\
 &= (\partial_k f) a_k + f (\partial_k a_k) \\
 &= \bar{a} \cdot (\nabla f) + f (\nabla \cdot \bar{a})
 \end{aligned}$$

Se $\bar{a} = \nabla g$ si ottiene

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = (\nabla g) \cdot (\nabla f) + f (\nabla^2 g) \tag{C1}$$