Enrico Borghi

LO SPETTRO DEL CORPO NERO: DETERMINAZIONE SPERIMENTALE

A) INTRODUZIONE

Per studiare quantitativamente il fenomeno dell'assorbimento e dell'emissione di radiazione termica si introducono due grandezze: il potere assorbente e il potere emissivo.
Premesso che la presentazione di una potenza espressa in funzione della frequenza è detta *spettro di potenza*, si definisce *potere assorbente spettrale* ("spectral absorptance" nella letteratura fisica anglosassone) di un corpo una funzione $a(\nu, T, \mathcal{C})$ della frequenza ν della radiazione incidente, della temperatura T del corpo e delle caratteristiche fisiche del corpo espresse globalmente dalla variabile $\mathcal{C}$, la quale misura il rapporto fra il flusso di energia raggiante assorbita e il flusso di energia raggiante incidente.
Evidentemente a è adimensionale e ha valore compreso fra 0 e 1.
I corpi per i quali è $a = 0$ non assorbono l'energia che incide su di essi e sono perciò dei riflettori perfetti.
Qualunque corpo per il quale si ha $a = 1$, cioè per il quale si ha, a qualsiasi temperatura, totale assorbimento e nessuna riflessione della radiazione incidente a qualsiasi frequenza, è detto *corpo nero*.

Alla definizione di potere emissivo di un corpo premettiamo quella di *brillanza* (o *splendore* o *luminosità*): è una funzione $b(\nu, T, \mathcal{C})$ della frequenza ν della radiazione emessa, della temperatura T del corpo e delle caratteristiche fisiche del corpo descritte globalmente dalla variabile $\mathcal{C}$, la quale misura l'energia $\mathcal{E}$ della radiazione polarizzata linearmente emessa entro un angolo solido Ω unitario, in un intervallo di frequenza ν unitario, attraverso una superficie σ unitaria in direzione normale alla superficie e nell'unità di tempo.
Si ha quindi

$$d\mathcal{E} = b(\nu, T, \mathcal{C}) d\sigma dt d\nu d\Omega \quad ; \quad [\mathcal{E}] = L^2 M T^{-2} = energia$$

Per radiazione non polarizzata occorre introdurre a membro destro il fattore 2 per tener conto delle due possibili direzioni di polarizzazione.
Per ciò che riguarda b, possiamo affermare che esso ha le dimensioni di una densità spettrale di potenza per unità di superficie e per angolo solido unitario:

$$[b] = MT^{-2} = \frac{L^2 M T^{-3}}{L^2 T^{-1}} = \frac{potenza}{superficie \cdot frequenza \cdot angolo\ solido}$$

("spectral radiance" nella letteratura fisica anglosassone).

Ora assumiamo che per $d\sigma$ valga la *Legge di Lambert* (Johann Heinrich Lambert, 1760), cioè assumiamo che la brillanza in una direzione $\bar{\imath}$ facente un angolo α con la normale $\bar{n}$ a $d\sigma$ (v. fig. 1)

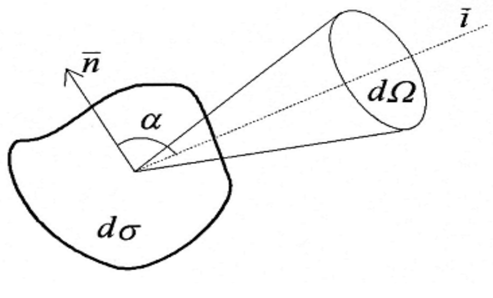

fig. 1

valga $b(\nu, T, \mathcal{C}) \cos\alpha$ e proponiamoci di integrare l'espressione della $d\mathcal{E}$ su tutto l'angolo solido 2π, cioè in tutto il semispazio limitato dal piano contenente $d\sigma$, riferendoci a un sistema di coordinate sferiche, con asse polare coincidente con $\overline{n}$, nel quale α è la colatitudine, cioè l'angolo polare, e φ è la longitudine, cioè l'azimuth. Si ha così:

$$d\mathcal{E}' = \int_{2\pi} b(\nu, T, \mathcal{C}) d\sigma dt d\nu \cos\alpha d\Omega$$

ovvero, essendo $d\Omega = \sin\alpha d\alpha d\varphi$

$$d\mathcal{E}' = b(\nu, T, \mathcal{C}) d\sigma dt d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\alpha \sin\alpha d\alpha = b(\nu, T, \mathcal{C}) d\sigma dt d\nu 2\pi \frac{1}{2} \left[\sin^2\alpha \right]_0^{\pi/2}$$

e quindi

$$d\mathcal{E}' = \pi b(\nu, T, \mathcal{C}) d\sigma dt d\nu$$

A questo punto definiamo *potere emissivo spettrale* ("spectral exitance" o "spectral radiant exitance" nella letteratura fisica anglosassone) la quantità

$$e(\nu, T, \mathcal{C}) = \pi b(\nu, T, \mathcal{C}) \frac{erg}{sec \cdot cm^2 \cdot Hz} \quad ; \quad [e] = \frac{L^2 M T^{-3}}{L^2 T^{-1}} = \frac{potenza}{superficie \cdot frequenza}$$

cosicché

$$d\mathcal{E}' = e(\nu, T, \mathcal{C}) d\sigma dt d\nu \tag{1}$$

Ciò posto, un teorema dimostrato da Gustav Robert Kirchhoff nel 1859 (v., ad es., R. Becker, "Electromagnetic fields and interactions, Vol. II, Chapter E I") afferma che, in condizioni di equilibrio termodinamico, il rapporto e/a è indipendente dalla natura del corpo, cioè

$$\frac{e(\nu, T, \mathcal{C})}{a(\nu, T, \mathcal{C})} = E(\nu, T) \frac{erg}{sec \cdot cm^2 \cdot Hz} \tag{2}$$

La (2), detta *Legge della radiazione di Kirchhoff*, ha grande importanza perché permette di ricavare dalle due grandezze e e a, relative a un ben determinato corpo avente date dimensioni, forma, natura, ecc. una grandezza, la $E(\nu, T)$, funzione solo della frequenza della radiazione scambiata e della temperatura alla quale, in condizioni di equilibrio termodinamico, avviene lo scambio.
La $E(\nu, T)$ è dunque una funzione universale, cioè non legata ad alcun corpo particolare, e quindi è valida per tutti i corpi.
La (2) può essere espressa a parole in modo semplice e sintetico dicendo che ogni corpo è in grado di emettere quelle stesse radiazioni che è in grado di assorbire.
Poiché a è adimensionale, le dimensioni di $E(\nu, T)$ sono uguali a quelle di e, cioè sono quelle di una potenza per superficie unitaria e per intervallo di frequenza unitario:

$$[E] = \frac{L^2 M T^{-3}}{L^2 T^{-1}} = \frac{potenza}{superficie \cdot frequenza}$$

Per un corpo nero si ha, per definizione, $a = 1$ perciò

$$e_{c.n.} = E(\nu, T) \tag{3}$$

Poiché $E(\nu, T)$ non dipende da $\mathcal{C}$, un corpo nero ha un potere emissivo indipendente dalle sue caratteristiche fisiche.

Notiamo, per inciso, che l'attributo "nero" fa riferimento non al colore del corpo nero, ma alle sue proprietà di assorbimento della radiazione elettromagnetica. Così un corpo nero può avere colore scuro a temperatura ordinaria perché non emette radiazione visibile, ma può divenire brillante se adeguatamente riscaldato. Le sue caratteristiche di emissione luminosa (e quindi il modo in cui esso si rende visibile) variano con la temperatura, ma non quelle di assorbimento, perciò un corpo nero può presentarsi sia scuro che brillante. Ad esempio il sole, considerato come una "apertura nel cielo" dalla quale la radiazione incidente viene interamente assorbita a qualsiasi frequenza, e quindi non si ha riflessione, è con buona approssimazione un corpo nero a circa $5600K$.

Ciò premesso, ci proponiamo di determinare la densità spettrale e volumica di energia raggiante u contenuta, in condizioni di equilibrio termodinamico, in una cavità termostatabile, cioè che possa essere mantenuta a una temperatura prestabilita, e che abbia pareti non trasparenti .

Osserviamo innanzitutto che la u possiede una importante proprietà: essa dipende solamente dalla temperatura T delle pareti della cavità e dalla frequenza ν della radiazione ed è del tutto indipendente dalla forma e dalle dimensioni della cavità, oltre che dal materiale di cui sono fatte le sue pareti.

L'esistenza di questa proprietà può essere dimostrata facilmente.

Consideriamo due cavità aventi uguale temperatura e diversa forma e dimensioni e pareti costituite di materiali diversi (v. fig. 2). Indichiamo con A e B le due cavità e con u_A e u_B le densità di energia corrispondenti.

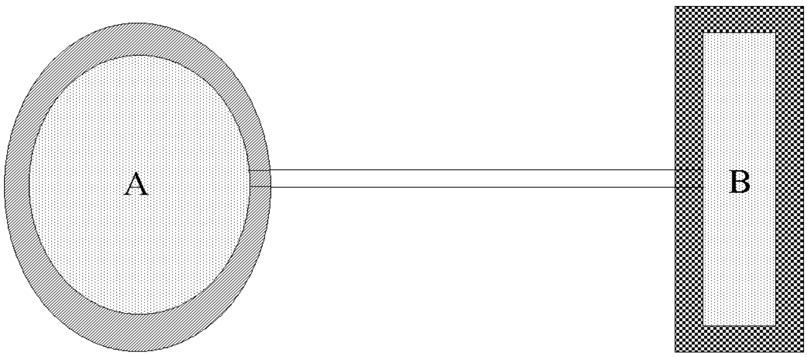

fig. 2

Ora colleghiamo per un certo tempo le due cavità con un condotto che permetta il passaggio di radiazione dall'una all'altra, e rimuoviamo poi il condotto riportando le due cavità nelle condizioni di isolamento iniziali.

Se vi è stato passaggio di radiazione da A a B, allora A, che ha ceduto radiazione, si trova a una temperatura maggiore di quella che corrisponde alla energia $u'_A < u_A$ della radiazione che in essa è rimasta, e perciò deve raffreddarsi, mentre B, che ha ricevuto radiazione, si trova a temperatura minore di quella che corrisponde alla energia $u'_B > u_B$ della radiazione che in essa si è accumulata e perciò deve riscaldarsi.

La differenza di temperatura ottenuta può essere usata per far funzionare un motore termico. Ma ciò è in contrasto con il Secondo Principio della Termodinamica che, nella formulazione dovuta a Kelvin, afferma che è impossibile che l'unico risultato di una trasformazione calore-lavoro sia la produzione di lavoro a spese del calore fornito da un'unica sorgente a temperatura uniforme.

Segue quindi che non può esservi stato passaggio di radiazione da una cavità all'altra, e perciò deve essere $u_A = u_B$ quali che siano le caratteristiche fisiche e geometriche delle cavità.
In definitiva si può scrivere

$$u = u(\nu, T)\frac{erg}{cm^3 Hz} \quad ; \quad [u] = \frac{ML^2T^{-2}}{L^3T^{-1}} = \frac{energia}{volume \cdot frequenza} = ML^{-1}T^{-1}$$

Le dimensioni di u sono quelle di una energia per volume unitario e per intervallo unitario di frequenza.

Per ottenere l'energia $u(\nu, T)$ si pratica un piccolo foro nella parete della cavità e si misura la densità spettrale della potenza della radiazione in uscita, cioè il potere emissivo del foro, in funzione del quale, come ora vedremo, può essere definita la $u(\nu, T)$.

Consideriamo una cavità le cui pareti non trasparenti siano a temperatura T e supponiamo che in essa vi sia una condizione di equilibrio fra radiazione emessa e radiazione assorbita dalle pareti.
Indichiamo con $d\sigma$ un elemento di superficie del foro praticato nella parete della cavità e calcoliamo l'energia raggiante che incide su $d\sigma$ in un intervallo di tempo dt.

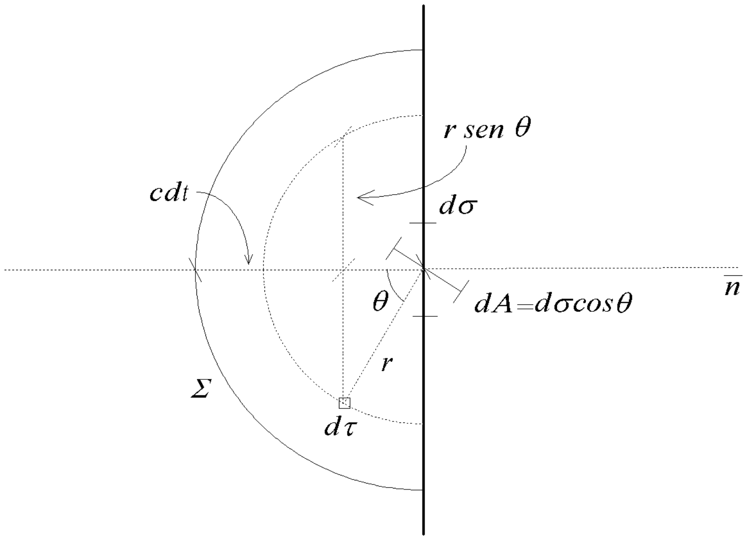

fig. 3

Indichiamo con $u(\nu, T)d\tau = u(\nu, T)r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ l'energia; φ è misurato su un piano perpendicolare al foglio avente traccia parallela alla traccia della parete e passante per il punto r, θ, cosicché $d\tau$ è una porzione di un toro giacente sul piano, avente sezione infinitesima e raggio pari a $r\sin\theta$ (v. fig. 3).
Alla u possiamo pensare come all'energia associata ad onde che si propagano entro la cavità in tutte le direzioni, il che equivale a supporre che dall'intorno $d\tau$ di ciascun punto di essa venga emesso un flusso di energia in tutte le direzioni (radiazione isotropa).
Poiché questa energia si propaga con velocità c, il contributo alla radiazione su $d\sigma$ nell'intervallo dt proviene da tutti i punti per cui $r \leq cdt$, i quali sono contenuti nella semisfera Σ avente raggio cdt.
Ciò posto, poiché la radiazione si propaga isotropicamente entro la cavità, la porzione di energia che da $d\tau$ raggiunge $d\sigma$ si ottiene calcolando dapprima l'energia che attraversa una

porzione dA (centrata in $d\sigma$) della superficie sferica che ha centro in $d\tau$ e raggio r, cioè

$$\frac{u(\nu,T)d\tau}{4\pi r^2}dA \tag{4}$$

e poi tenendo conto del fatto che $dA = d\sigma\cos\theta$. Si ottiene così, introducendo anche l'espressione di $d\tau$:

$$\frac{u(\nu,T)d\tau}{4\pi r^2}d\sigma\cos\theta = \frac{u(\nu,T)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi}{4\pi r^2}d\sigma\cos\theta = \frac{u(\nu,T)\sin\theta\cos\theta drd\theta d\varphi}{4\pi}d\sigma \tag{5}$$

Ora occorre integrare l'espressione a membro destro della (5) osservando che r varia da 0 a cdt, mentre φ varia da 0 a 2π e θ da 0 a $\pi/2$, e tenendo presente che in condizioni di equilibrio termodinamico u è costante e uniforme entro tutta la cavità. Si ottiene così:

$$d\mathcal{E}' = \frac{u(\nu,T)d\sigma}{4\pi}\int_0^{cdt}dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{u(\nu,T)d\sigma}{4\pi}cdt2\pi\Big[\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{cu(\nu,T)d\sigma}{4}dt$$

che è l'espressione dell'energia raggiante per intervallo unitario di frequenza che incide su $d\sigma$ in un intervallo di tempo dt. Per un intervallo compreso fra ν e $\nu + d\nu$ si ha

$$d\mathcal{E}' = \frac{cu(\nu,T)}{4}d\sigma dt d\nu \tag{6}$$

Confrontando la (6) con la (1) si ottiene il potere emissivo spettrale del foro

$$e(\nu,T,\mathcal{C}) = \frac{cu(\nu,T)}{4} \tag{7}$$

Ma tale foro è un corpo nero.
Infatti non vi è alcuna differenza fra il caso in cui il foro viene chiuso con materiale "nero" capace di assorbire ogni radiazione incidente dall'esterno su di esso senza rifletterne alcuna e il caso in cui il foro è aperto cosicché la radiazione, dopo averlo attraversato, viene riflessa e assorbita dalle pareti interne della cavità fino ad esaurirsi.
Possiamo dunque scrivere

$$e_{c.n.} = \frac{cu(\nu,T)}{4}$$

e quindi, tenendo conto della (3):

$$E(\nu,T) = \frac{cu(\nu,T)}{4}\frac{cm}{sec}\frac{erg}{cm^3 Hz} \tag{8}$$

da cui

$$u(\nu,T) = \frac{4}{c}E(\nu,T) \quad ; \quad [u] = \frac{1}{LT^{-1}}\frac{L^2MT^{-3}}{L^2T^{-1}} = ML^{-1}T^{-1} \tag{9}$$

Abbiamo così ottenuto la relazione che ci eravamo proposti di determinare (v. pag. 5), cioè la relazione fra la densità spettrale e volumica di energia elettromagnetica $u(\nu,T)$ presente nella cavità e la densità spettrale e superficiale di potenza $E(\nu,T)$ della radiazione (polarizzata) uscente dal foro praticato nella cavità.

B) RISULTATI SPERIMENTALI

La potenza della radiazione emessa per intervallo di frequenza unitario e per unità di superficie da *qualunque* corpo nero (v. pag. (3)), potenza che nell'eq. (3) è stata indicata con $E(\nu, T)$ e che brevemente si usa chiamare *densità spettrale del corpo nero*, è stata oggetto di precise misurazioni effettuate sul corpo nero costituito dal piccolo foro praticato nella parete di una cavità mantenuta a temperatura prestabilita.
Si è ottenuta una famiglia di curve a T costante che vengono usualmente presentate in funzione di λ (v. fig. 4)

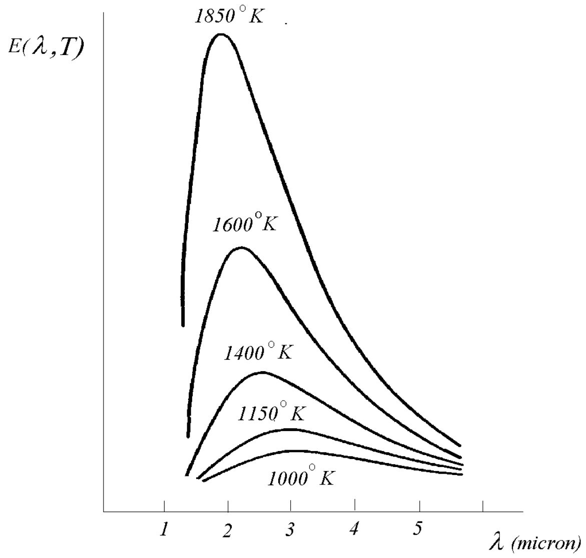

fig. 4

e sono così espresse da $E(\lambda, T)$ (ricordiamo che $\lambda = c/\nu$).
Dall'esame di queste curve si è dedotto che il massimo di emissione per ogni fissato T si ha in corrispondenza di una lunghezza d'onda λ_{max} che soddisfa l'equazione

$$\lambda_{max} T = 0,29 cmK \tag{10}$$

detta *Legge dello spostamento* di Wien (Wilhelm Carl Werner Wien, 1893) perché afferma che, all'aumentare della temperatura del corpo nero, la posizione del massimo di emissione si sposta nella direzione delle lunghezze d'onda minori in modo tale che il prodotto $\lambda_{max} T$ rimane costante.

Come esempio di applicazione di questa legge mostriamo come si può determinare la temperatura della superficie del sole (considerato come un corpo nero).
Poiché la luce emessa dal sole ha la massima intensità in corrispondenza di una lunghezza d'onda di circa 5200$\AA$ si può scrivere:

$$5200\AA \cdot \frac{1cm}{10^8 \AA} T = 0,29 cmK$$

da cui

$$T = \frac{0,29 \cdot 10^8}{0,52 \cdot 10^4} K = 5576K$$

Questa è una ragionevole stima della temperatura della superficie solare, detta anche fotosfera.

Ritorniamo alla fig. 4.
Dall'analisi formale delle curve si ricava anche che la potenza emessa su tutto l'intervallo di lunghezza d'onda da 0 a ∞ ("total radiant exitance" nella letteratura fisica anglosassone) vale, per unità di superficie

$$E(T) = \int_0^{\infty} E(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{cu(\lambda, T)}{4} d\lambda = \sigma T^4 \tag{11}$$

con

$$\sigma = 5,6697 \cdot 10^{-5} \frac{erg}{sec \cdot cm^2 \cdot K^4} \quad ; \quad \sigma = 5,6697 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

La (11) è detta *Legge di Stefan-Boltzmann* (JOSEPH STEFAN, 1879; LUDWIG BOLTZMANN, 1884).

L'intervallo delle lunghezze d'onda corrispondenti alla luce visibile è approssimativamente centrato intorno a $500nm$ $(0,5\mu m)$. Se osserviamo il colore di un corpo, ad esempio un pezzo di ferro, che riscaldiamo a temperature via via crescenti, notiamo che esso diviene dapprima rosso scuro, poi arancio, poi giallo, azzurro e infine violetto.
La variazione di colore trova spiegazione nella Legge dello spostamento: la lunghezza d'onda λ_{max} corrispondente al massimo dell'emissione si sposta, al crescere della temperatura, verso valori via via minori in accordo con la (10) e questo, nell'intervallo della luce visibile, equivale al passaggio dal rosso al violetto attraverso tutti i colori dell'arcobaleno.

Appendice A

Una grandezza che conviene considerare in vista di un suo futuro uso è la pressione p esercitata sulle pareti di una cavità dalla radiazione termica in essa presente e dotata di energia avente densità volumica e spettrale $u(\nu, T)$.
Per determinare p ricordiamo innanzitutto l'espressione della densità volumica e spettrale della quantità di moto elettromagnetica p_e

$$p_e = \frac{u}{c} \frac{erg}{\dfrac{cm}{sec} cm^3 Hz} \tag{A1}$$

Si ha così

$$[p_e] = \left[\frac{u}{c}\right] = \frac{ML^2T^{-2}}{LT^{-1}L^3T^{-1}} = \frac{MLT^{-1}}{L^3T^{-1}} = \frac{q.\ di\ moto}{volume \cdot frequenza}$$

Consideriamo poi la radiazione in uscita da un volumetto $d\tau$ posto nel punto r, θ, ϕ della cavità. Questa radiazione incide e si riflette su una porzione $d\sigma$ della parete della cavità (v. l'eq. (4)) trasferendo ad essa una quantità di moto pari a due volte la quantità di moto della radiazione che incide perpendicolarmente sulla parete, perciò per incidenza ad angolo θ e per intervallo unitario di frequenza si ha dall'eq. (5):

$$d\triangle p_e = \frac{\dfrac{ud\tau}{4\pi r^2} d\sigma \cos\theta}{c} \cos\theta - \left(-\frac{\dfrac{ud\tau}{4\pi r^2} d\sigma \cos\theta}{c} \cos\theta \right) = 2 \frac{\dfrac{u \sin\theta \cos\theta dr d\theta d\varphi}{4\pi} d\sigma}{c} \cos\theta$$

e quindi

$$d\triangle p_e = \frac{ud\sigma}{2\pi c} \sin\theta \cos^2\theta dr d\theta d\varphi \tag{A2}$$

$$[d\triangle p_e] = \frac{ML^{-1}T^{-1}L^2}{LT^{-1}} L = \frac{MLT^{-1}}{T^{-1}} = \frac{q.\ di\ moto}{frequenza}$$

Integrando, cioè sommando con opportuni estremi gli elementi infinitesimi $d\triangle p_e$ (v. il ragionamento alle pagine 5 e 6 di questo studio), si ottiene:

$$\begin{aligned}
\triangle p_e = \int d\triangle p_e &= \int_0^{c\triangle t} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{ud\sigma}{2\pi c} \sin\theta \cos^2\theta d\theta \\
&= ud\sigma \triangle t \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos^2\theta d\theta \\
&= ud\sigma \triangle t \left[-\frac{1}{3} \cos^3\theta \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{ud\sigma \triangle t}{3} \quad ; \quad [\triangle p_e] = ML^{-1}T^{-1}L^2T = \frac{MLT^{-1}}{T^{-1}} = \frac{q.\ di\ moto}{frequenza}
\end{aligned}$$

da cui si ricava la densità spettrale di forza agente su $d\sigma$:

$$\frac{\triangle p_e}{\triangle t} = \frac{1}{3} u d\sigma \quad ; \quad \left[\frac{\triangle p_e}{\triangle t}\right] = \frac{MLT^{-1}}{T^{-1}} \cdot \frac{1}{T} = \frac{MLT^{-2}}{T^{-1}} = \frac{forza}{frequenza}$$

Da quest'ultima si ottiene la densità spettrale della pressione di radiazione p su $d\sigma$

$$p = \frac{\triangle p_e / \triangle t}{d\sigma} = \frac{1}{3} u \frac{dine}{cm^2 \ u.d.m. \ di \ spettro} \quad ; \quad [p] = \frac{pressione}{u.d.m. \ di \ spettro} \tag{A3}$$

dove si è introdotto il termine "unità di misura di spettro" perché, oltre che alla $u = u(\nu, T)$ (e allora l'u.d.m. di spettro è l'Hz), si fa talvolta riferimento a $u = u(\lambda, T)$ (e allora l'u.d.m. di spettro è il cm) oppure a $u = u(T)$, cioè alla u integrata su tutto lo spettro, e allora occorre semplicemente togliere "u.d.m. di spettro" perché p non è più una densità spettrale.

Notiamo che abbiamo preso in considerazione pareti perfettamente riflettenti, (potere assorbente nullo e quindi, per la Legge di Kirchhoff, potere emissivo nullo) ma il risultato (A3) vale per pareti di qualsivoglia natura; infatti, se una parete è solo parzialmente riflettente e quindi assorbe radiazione e perciò (Legge di Kirchhoff) è in grado di emetterne, allora il mancato trasferimento di quantità di moto dovuto alla riflessione parziale è compensato dalla spinta prodotta per il Principio di azione e reazione dalla radiazione emessa.