

Enrico Borghi

DIFFUSIONE DI UN ELETTRONE IN UN CAMPO E.M. ESTERNO
DIAGRAMMI DI FEYNMAN

Richiami a studi presenti in “fiscarivisitata”

Leggendo “Diffusione di un elettrone in un campo e.m. esterno - Diagrammi di Feynman” si incontrano richiami ai seguenti studi

(a) *Propagatori*

(b) *L'equazione di Dirac*

(c) *Diffusione di particelle in un campo di forze*

che fanno parte di “fiscarivisitata” e che devono essere ben noti a chi si interessa alla diffusione di un elettrone in un campo elettromagnetico esterno seguendo la presentazione che di questo argomento viene data in questo studio.

In questo studio ci proponiamo di descrivere relativisticamente il fenomeno della diffusione (scattering) di un elettrone avente massa m_0 e carica e in un campo elettromagnetico esterno avente potenziale $\bar{\Phi}$.

Mostreremo che per questo fenomeno il formalismo dell'elettrodinamica quantistica prevede che si abbia, contemporaneamente al movimento dell'elettrone e indipendentemente da questo, un processo di creazione-annichilazione di coppie elettrone-positrone.

Per descrivere questi fenomeni faremo riferimento non al metodo della quantizzazione dei campi, ma al metodo di Feynman che è basato sull'uso dei propagatori.

Introdurremo anche le tecniche grafiche descrittive delle interazioni di queste particelle col campo e.m. (diagrammi di Feynman).

Il metodo di Feynman verrà presentato trasportando in ambiente relativistico e riferendo all'equazione di Dirac le definizioni e i concetti non-relativistici riguardanti i propagatori introdotti nello studio (a) e riferiti all'equazione di Schrödinger.

Il punto di partenza sono le equazioni differenziali dell'oggetto matematico $\mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}]$, detto *propagatore di Feynman per l'elettrone*, equazioni che sono espresse da

$$\left\{ -\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{R}} + m_0 c + \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}}) \right\} \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}})] = \hbar \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \quad ; \quad [\mathcal{K}_F] = L^{-3} \quad (1)$$

$$\mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}}')] \left\{ -\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{R}'} + m_0 c + \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}}') \right\} = \hbar \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}')$$

e che sono le corrispondenti relativistiche delle equazioni differenziali del propagatore \mathcal{K} espresse dalle (34) e (35) dello studio (a) che qui riportiamo:

$$\left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_{\bar{\mathbf{R}}}^2 + \mathcal{V}(\bar{\mathbf{R}}, t) \right\} \mathcal{K}[\bar{\mathbf{R}}, t; \bar{\mathbf{R}}', t_0 | \mathcal{V}(\bar{\mathbf{R}}, t)] = \hbar \delta(t - t_0) \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \quad (2)$$

$$\mathcal{K}[\bar{\mathbf{R}}, t; \bar{\mathbf{R}}', t_0 | \mathcal{V}(\bar{\mathbf{R}}', t_0)] \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t_0} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_{\bar{\mathbf{R}}'}^2 + \mathcal{V}(\bar{\mathbf{R}}', t_0) \right\} = \hbar \delta(t - t_0) \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}')$$

Notiamo nella prima delle (1), fra parentesi graffe, l'operatore che compare nella equazione di Dirac nella forma (160) dello studio (b) corrispondente all'operatore di Schrödinger che compare fra parentesi graffe nella prima delle (2):

$$\left\{ -\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{R}} + m_0 c + \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}}) \right\} \longleftrightarrow \left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_{\bar{\mathbf{R}}}^2 + \mathcal{V}(\bar{\mathbf{R}}, t) \right\}$$

Analogamente esiste fra l'operatore che compare fra parentesi graffe nella seconda delle (1) e l'operatore che compare nella seconda delle (2).

Notiamo che, in particolare, si ha ($e = \text{carica dell'elettrone} = -4,8032 \cdot 10^{-10}$ u.e.s.):

$$\frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}}) \longleftrightarrow \mathcal{V}(\bar{\mathbf{R}}, t) \quad ; \quad \bar{\mathbf{R}} \equiv ct, \bar{\mathbf{R}} \quad (3)$$

$$\mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}] \longleftrightarrow \mathcal{K}[\bar{\mathbf{R}}, t; \bar{\mathbf{R}}', t_0 | \mathcal{V}] \quad ; \quad \bar{\mathbf{R}}' \equiv ct_0, \bar{\mathbf{R}}'$$

Evidenziando, ad esempio nella prima delle (1), gli indici tensoriali ($\mu = 0, 1, 2, 3$) e bispinoriali ($a, b, c = 1, 2, 3, 4$) si ha

$$\left\{ -\gamma_a^{\mu b} i\hbar \partial_\mu + m_0 c \mathbf{1}_a^b - \frac{e}{c} \gamma_a^{\mu b} \Phi_\mu(\bar{\mathbf{R}}) \right\} \mathcal{K}_{F,b}^c[\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}] = \mathbf{1}_a^c \hbar \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \quad (4)$$

e risulta così evidente che \mathcal{K}_F è una matrice 4×4 .

* * *

Se $\bar{\Phi} = 0$ le (1) divengono

$$\begin{aligned} \{-\bar{\gamma} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{R}} + m_0 c\} \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}' | 0] &= \hbar \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \\ \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}' | 0] \{\bar{\gamma} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{R}'} + m_0 c\} &= \hbar \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \end{aligned}$$

Poniamo

$$\mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}' | 0] \equiv S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \quad ; \quad [S_F] = L^{-3}$$

cosicché si ha

$$\begin{aligned} \{-\bar{\gamma} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{R}} + m_0 c\} S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') &= \hbar \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \\ S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \{\bar{\gamma} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{R}'} + m_0 c\} &= \hbar \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \end{aligned} \quad (5)$$

Per analogia con la (48) dello studio (a) che qui riportiamo

$$\begin{aligned} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\bar{\mathbf{R}}}^2 \right) \mathcal{K}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}', t - t_0) &= \hbar \delta(t - t_0) \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \\ \mathcal{K}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}', t - t_0) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t_0} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\bar{\mathbf{R}}'}^2 \right) &= \hbar \delta(t - t_0) \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \end{aligned}$$

si vede che

$$S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \longleftrightarrow \mathcal{K}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}', t - t_0) \quad (6)$$

La soluzione della (5) (corrispondente alla (44) dello studio (a)), detta *funzione di Green-Feynman per l'equazione libera di Dirac* o *propagatore di Feynman per l'elettrone libero*,  

$$S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') = \{\bar{\gamma} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{R}} + m_0 c\} \Delta_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \quad (7)$$

dove

$$\Delta_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') = \theta(t - t') \Delta^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}'; m_0) - \theta(t' - t) \Delta^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}'; m_0) \quad (8)$$

essendo $\theta(t - t')$ e $\theta(t' - t)$ funzioni a gradino unitarie ed essendo $\Delta^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}'; m_0)$ e $\Delta^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}'; m_0)$ definiti dalle (A24) dell'Appendice A che qui riscriviamo:

$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}'; m_0) &= \frac{i}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\bar{P})} e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot (\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}')} d\bar{P} \\ \Delta^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}'; m_0) &= -\frac{i}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\bar{P})} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot (\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}')} d\bar{P} \end{aligned} \quad ; \quad E(\bar{P}) = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \bar{P}^2}$$

La (8) mostra che $\Delta_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}')$ vale $\Delta^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}'; m_0)$ per $t > t'$ e $-\Delta^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}'; m_0)$ per $t < t'$.

La $S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}')$ pu  essere espressa anche cos :

$$S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') = \theta(t - t') S^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') - \theta(t' - t) S^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \quad (9)$$

essendo $S^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}')$ e $S^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}')$ definiti nella (A27) dell'Appendice A che qui riscriviamo:

$$\begin{aligned} S^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') &= \{\bar{\gamma} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{R}} + m_0 c\} \Delta^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}'; m_0) \\ S^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') &= \{\bar{\gamma} \cdot (-i\hbar \square_{\mathbf{R}}) + m_0 c\} \Delta^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}'; m_0) \end{aligned}$$

Notiamo che per la (A28) dell'Appendice A si può scrivere

$$\begin{aligned} S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') &= \theta(t - t')S^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') - \theta(t' - t)S^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') = \\ &= -\theta(t - t')S^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}' - \bar{\mathbf{R}}) + \theta(t' - t)S^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}' - \bar{\mathbf{R}}) = S_F(\bar{\mathbf{R}}' - \bar{\mathbf{R}}) \end{aligned} \quad (10)$$

La (9) mostra che il propagatore $S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}')$ vale $S^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}')$ per $t > t'$ e $-S^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}')$ per $t < t'$. Notiamo che, dei due termini di cui S_F è composto, $S^{(+)}$ è associato a una propagazione di elettroni che avviene per tempi crescenti, mentre $S^{(-)}$ è associato a una propagazione di elettroni che avviene per tempi decrescenti.

Vedremo fra poco quale interpretazione fisica può essere data a quest'ultimo caso.

* * *

Riprendiamo in considerazione la prima delle (1) e poniamo in essa $\bar{\mathbf{Z}}_1 \equiv ct_1, \bar{\mathbf{R}}_1$ in luogo di $\bar{\mathbf{R}} \equiv ct, \bar{\mathbf{R}}$, moltiplichiamo a sinistra per $S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1)$ e integriamo rispetto a $\bar{\mathbf{Z}}_1$:

$$\begin{aligned} &\int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \left\{ -\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{Z}_1} \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)] \right\} d\bar{\mathbf{Z}}_1 + \\ &+ \int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) m_0 c \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)] d\bar{\mathbf{Z}}_1 + \int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)] d\bar{\mathbf{Z}}_1 = \\ &= \hbar \int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \delta(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{R}}') d\bar{\mathbf{Z}}_1 \end{aligned}$$

Ora integriamo per parti il primo integrale a membro sinistro ricordando che

$$\int f \{ \square g \} d\bar{\mathbf{R}} = - \int \{ f \square \} g d\bar{\mathbf{R}} + [fg] = - \int \{ f \square \} g d\bar{\mathbf{R}} \quad (11)$$

e in questo caso f è $S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1)$ e g è $\mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)]$. Si ottiene così (l'operatore $\square_{\mathbf{Z}_1}$ agisce su S_F)

$$\begin{aligned} &- \int \{ S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) (-\bar{\boldsymbol{\gamma}}) \cdot i\hbar \square_{\mathbf{Z}_1} \} \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)] d\bar{\mathbf{Z}}_1 + \\ &\int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) m_0 c \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)] d\bar{\mathbf{Z}}_1 + \int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)] d\bar{\mathbf{Z}}_1 = \\ &= \hbar S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} &\int \{ S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) (\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{Z}_1} + m_0 c) \} \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)] d\bar{\mathbf{Z}}_1 + \\ &+ \int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)] d\bar{\mathbf{Z}}_1 = \hbar S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \end{aligned}$$

Se ora teniamo presente la seconda delle (5) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &\int \hbar \delta(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)] d\bar{\mathbf{Z}}_1 + \\ &+ \int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)] d\bar{\mathbf{Z}}_1 = \hbar S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \end{aligned}$$

e otteniamo così la seguente equazione integrale equivalente alla prima delle (1):

$$\mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{R}}; \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}})] = S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') - \frac{1}{\hbar} \int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{Z}}_1; \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1)] d\bar{\mathbf{Z}}_1 \quad (12)$$

La (12) è la corrispondente relativistica della (51) dello studio (a) che qui riscriviamo

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t; \bar{\mathcal{R}}', t_0 | \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t)] = \\ & = \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t - t_0) - \frac{1}{\hbar} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}_1, t_1; \bar{\mathcal{R}}', t_0 | \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1)] d\bar{\mathcal{R}}_1 dt_1 \end{aligned}$$

e può essere risolta con un metodo iterativo simile a quello usato per ottenere dalla (51) la (52) dello studio (a) che qui riscriviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t; \bar{\mathcal{R}}', t_0 | \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t)] & = \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t - t_0) + \\ & - \frac{1}{\hbar} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}', t_1 - t_0) d\bar{\mathcal{R}}_1 dt_1 + \\ & + \frac{1}{\hbar^2} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}_2, t_1 - t_2) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_2, t_2) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_2 - \bar{\mathcal{R}}', t_2 - t_0) \cdot \\ & \cdot d\bar{\mathcal{R}}_1 dt_1 d\bar{\mathcal{R}}_2 dt_2 + \dots \end{aligned}$$

Più semplicemente, si può ottenere il medesimo risultato effettuando in quest'ultima le sostituzioni basate sulle corrispondenze (3) e (6):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_F[\bar{\mathbf{R}}; \bar{\mathbf{R}}' | \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}})] & = S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') + \\ & - \frac{1}{\hbar} \int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) S_F(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{R}}') d\bar{\mathbf{Z}}_1 + \\ & + \frac{1}{\hbar^2} \int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) S_F(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_2) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_2) S_F(\bar{\mathbf{Z}}_2 - \bar{\mathbf{R}}') d\bar{\mathbf{Z}}_1 d\bar{\mathbf{Z}}_2 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

* * *

Consideriamo ora la diffusione relativistica di un elettrone in un campo e.m. descritto dal potenziale $\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}})$. L'elettrone, emesso da una sorgente, si dirige verso uno spazio in cui il campo elettromagnetico genera forze tali da produrre effetti praticamente osservabili e, in uscita da questo spazio, si dirige verso un dispositivo in grado di rivelarlo.

Lo studio di questo fenomeno, che può essere considerato una transizione da uno stato iniziale (uscita dalla sorgente) a uno stato finale (ingresso nel rivelatore), consiste nel calcolo dell'*ampiezza di probabilità di transizione* e verrà affrontato per passi successivi seguendo la traccia presentata nello studio non relativistico (c) dove (v. eq. (47)) l'ampiezza di probabilità di transizione di una particella in un campo di forze è espressa da una somma di termini rappresentativi della diffusione della particella in un numero discreto e crescente di punti del campo di forze, mentre fra due punti nei quali hanno luogo due consecutive diffusioni la particella si muove liberamente, non soggetta ad alcuna forza.

Ciò premesso, iniziamo dalla descrizione dell'elettrone che, prima di entrare nello spazio in cui è attivo il campo e.m. o dopo esserne uscito, si muove liberamente non essendo soggetto all'azione del potenziale e.m. ($\bar{\Phi} = 0$).

Come sappiamo dall'eq. (B1) dell'Appendice B, la soluzione $\Psi(\bar{\mathbf{R}})$ dell'equazione di Dirac per l'elettrone libero è costituita da due parti, una con energia positiva $\chi^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}|g_u]$ e una con energia negativa $\chi^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}|g_v]$ espresse rispettivamente dalle eq. (B2) e (B3) dell'Appendice B che qui riscriviamo

$$\begin{aligned}\chi^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}|g_u] &= \frac{1}{\hbar^{3/2}} \sum_r \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_u(\bar{P}, r) \chi^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, r) d\bar{P} \quad ; \quad \text{energia positiva} \\ \chi^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}|g_v] &= \frac{1}{\hbar^{3/2}} \sum_s \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_v^*(\bar{P}, s) \chi^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, s) d\bar{P} \quad ; \quad \text{energia negativa}\end{aligned}\tag{14}$$

essendo (v. eq. (B5) dell'Appendice B)

$$\chi^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, r) = \mathbf{u}(\bar{P}, r) e^{-\frac{i}{\hbar}(+\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} \quad ; \quad \chi^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, s) = \mathbf{v}(\bar{P}, s) e^{-\frac{i}{\hbar}(-\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}}\tag{15}$$

dove \mathbf{u} e \mathbf{v} sono gli autobispinori appartenenti rispettivamente agli autovalori positivo e negativo dell'energia dell'elettrone libero (v. cap. 8 dello studio (b)).

Se invece consideriamo la soluzione $\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{R}})$ dell'equazione coniugata di Dirac otteniamo le due seguenti parti (v. le eq. (B8) e (B9) dell'Appendice B)

$$\begin{aligned}\bar{\chi}^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}|g_v] &= \frac{1}{\hbar^{3/2}} \sum_s \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_v(\bar{P}, s) \bar{\chi}^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, s) d\bar{P} \quad ; \quad \text{energia positiva} \\ \bar{\chi}^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}|g_u] &= \frac{1}{\hbar^{3/2}} \sum_r \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_u^*(\bar{P}, r) \bar{\chi}^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, r) d\bar{P} \quad ; \quad \text{energia negativa}\end{aligned}\tag{16}$$

essendo (v. l'eq. (B11) dell'Appendice B)

$$\bar{\chi}^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, s) = \bar{\mathbf{v}}(\bar{P}, s) e^{-\frac{i}{\hbar}(+\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} \quad ; \quad \bar{\chi}^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, r) = \bar{\mathbf{u}}(\bar{P}, r) e^{-\frac{i}{\hbar}(-\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}}\tag{17}$$

dove $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{v}}$ sono i coniugati di Dirac di \mathbf{u} e \mathbf{v} (v. il cap. 7 dello studio (b)).

Completiamo la descrizione delle soluzioni Ψ e $\bar{\Psi}$ rispettivamente dell'equazione di Dirac e dell'equazione coniugata di Dirac osservando che le coniugate di Dirac delle parti a energia positiva (negativa) della Ψ espresse dalle (14) sono

$$\begin{aligned}\overline{\chi^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}|g_u]} &= \frac{1}{\hbar^{3/2}} \sum_r \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_u^*(\bar{P}, r) \overline{\chi^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, r)} d\bar{P} \quad ; \quad \text{energia positiva} \\ \overline{\chi^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}|g_v]} &= \frac{1}{\hbar^{3/2}} \sum_s \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_v(\bar{P}, s) \overline{\chi^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, s)} d\bar{P} \quad ; \quad \text{energia negativa}\end{aligned}$$

essendo (v. eq. (15))

$$\begin{aligned}\overline{\chi^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, r)} &= \bar{\mathbf{u}}(\bar{P}, r) e^{\frac{i}{\hbar}(+\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} \\ \overline{\chi^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, s)} &= \bar{\mathbf{v}}(\bar{P}, s) e^{\frac{i}{\hbar}(-\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}}\end{aligned}$$

e si ha quindi (v. eq. (17))

$$\overline{\chi^{(+)}} = \bar{\chi}^{(-)} \quad ; \quad \overline{\chi^{(-)}} = \bar{\chi}^{(+)}\tag{18}$$

cioè la coniugata di Dirac della parte a energia positiva (negativa) della Ψ è uguale alla parte a energia negativa (positiva) della coniugata di Dirac della Ψ .

Poniamo inoltre

$g(\overline{P}, r)$ = profilo del pacchetto d'onde descrittivo della sorgente dell'elettrone

$f(\overline{P}, s)$ = profilo del pacchetto d'onde descrittivo del rivelatore dell'elettrone

e introduciamo anche

$$\chi_F(\overline{R}) = \chi^{(+)}[\overline{R}|g] + \chi^{(-)}[\overline{R}|f] \quad (19)$$

Ciò posto, assumiamo

$\chi^{(+)}[\overline{R}|g]$ = elettrone con energia positiva in entrata dalla sorgente a \overline{R}

$\overline{\chi^{(+)}[\overline{R}|f]}$ = elettrone con energia positiva in uscita da \overline{R} al rivelatore

$\overline{\chi^{(-)}[\overline{R}|g]}$ = elettrone con energia negativa in moto all'indietro nel tempo da \overline{R} alla sorgente (20)

$\chi^{(-)}[\overline{R}|f]$ = elettrone con energia negativa in moto all'indietro nel tempo dal rivelatore a \overline{R}

L'interpretazione fisica di queste due ultime assunzioni verrà data fra poco, nella sezione "Diagrammi di Feynman".

Combinando opportunamente coppie di questi quattro bispinori si ottengono quattro ampiezze di probabilità di transizione dalla sorgente al rivelatore di un elettrone in un campo elettromagnetico, ampiezze che possono essere definite, sulla base delle corrispondenze

$$\langle \chi^{(\pm)}[f] | \chi^{(\pm)}[g] \rangle \longleftrightarrow (\phi[f], \phi[g])$$

e

$$\chi^{(\pm)}[\overline{R}|g] \longleftrightarrow \phi[\overline{\mathcal{R}}, t|g] \quad ; \quad \overline{\chi^{(\pm)}[\overline{R}|f]} \longleftrightarrow \phi^*[\overline{\mathcal{R}}, t|f] \quad ; \quad \frac{e}{c} \overline{\gamma} \cdot \overline{\Phi}(\overline{R}) \longleftrightarrow \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}, t) \quad (21)$$

partendo dall'unica espressione non relativistica (48) dello studio (c), nota come "Approssimazione di Born", che qui riscriviamo

$$A_{fi}^B = (\phi[f], \phi[g]) - \frac{i}{\hbar} \int \phi^*[\overline{\mathcal{R}}, t|f] \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}, t) \phi[\overline{\mathcal{R}}, t|g] d\overline{\mathcal{R}} dt \quad ; \quad [A_{fi}^B] = \text{adimensionale}$$

e che rappresenta la somma del termine di ordine zero e del termine di primo ordine dello sviluppo (47) dello studio (c).

Tali ampiezze sono:

$$S_B^{++}[f, g] = \langle \chi^{(+)}[f] | \chi^{(+)}[g] \rangle - \frac{i}{\hbar} \int \overline{\chi^{(+)}[\overline{R}|f]} \frac{e}{c} \overline{\gamma} \cdot \overline{\Phi}(\overline{R}) \chi^{(+)}[\overline{R}|g] d\overline{R} \quad (22)$$

$$S_B^{-+}[f, g] = \frac{i}{\hbar} \int \overline{\chi^{(-)}[\overline{R}|g]} \frac{e}{c} \overline{\gamma} \cdot \overline{\Phi}(\overline{R}) \chi^{(+)}[\overline{R}|g] d\overline{R} \quad (23)$$

$$S_B^{--}[f, g] = \langle \chi^{(-)}[f] | \chi^{(-)}[g] \rangle + \frac{i}{\hbar} \int \overline{\chi^{(-)}[\overline{R}|f]} \frac{e}{c} \overline{\gamma} \cdot \overline{\Phi}(\overline{R}) \chi^{(-)}[\overline{R}|g] d\overline{R} \quad (24)$$

$$S_B^{+-}[f, g] = -\frac{i}{\hbar} \int \overline{\chi^{(+)}[\overline{R}|f]} \frac{e}{c} \overline{\gamma} \cdot \overline{\Phi}(\overline{R}) \chi^{(-)}[\overline{R}|f] d\overline{R}, \quad (25)$$

dove $d\overline{R} \equiv d\mathbf{c}t d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z}$ e il simbolo B indica approssimazione di Born.

Nella (22) il segno negativo che precede il termine di primo ordine è in accordo con il segno dell'ampiezza di probabilità di transizione non relativistica espressa dalla (48) dello studio (c); nella (24) il segno che precede il termine di primo ordine è cambiato perché le (22) e (24) descrivono la diffusione di particelle con segno opposto; la giustificazione dei segni nelle (23) e (25) verrà data più avanti, ed è comunque poco importante perché in queste ultime manca il termine di ordine zero.

Le associate *densità di probabilità di transizione* sono espresse dal quadrato del modulo di ciascuna delle ampiezze di probabilità di transizione a membro sinistro.

Notiamo che nelle (22) e (24) il termine di ordine 0 è espresso in notazione bra-ket, mentre le (23) e (25) sono prive del termine di ordine 0 perché le soluzioni dell'equazione di Dirac con $\bar{\Phi} = 0$ e con diversi segni dell'energia sono mutuamente ortogonali.

Le ampiezze di probabilità di transizione a membro sinistro delle (22), (23), (24) e (25) sono ovviamente quantità scalari perché sono ottenute per saturazione degli indici dei due bispinori di primo ordine contenuti nel prodotto scalare bra-ket (quando è presente) e perché gli integrandi sono scalari del tipo espresso dall'eq. (208) dello studio (b) che qui riscriviamo

$$\bar{\Psi}\bar{\gamma} \cdot \bar{\rho}\Psi = \text{scalare} \quad ; \quad \bar{\rho} = 4\text{-vettore}$$

o, se si preferisce, perché sono ottenuti per saturazione dei due indici del bispinore di secondo ordine $\bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}$ (v. eq. (85) dello studio "Rappresentazioni spinoriali del gruppo di Lorentz") con gli indici dei due bispinori di primo ordine che compaiono sotto il segno di integrale:

$$S_B^{\ddot{}}[f, g] = \langle \chi^{(\cdot)a}[f] | \chi_a^{(\cdot)}[g] \rangle - \frac{i}{\hbar} \int \overline{\chi^{(\cdot)a}[\bar{R}|f]} \frac{e}{c} (\bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{R}))_a^b \chi_b^{(\cdot)}[\bar{R}|g] d\bar{R}$$

(i punti in $S_B^{\ddot{}}$, $\chi^{(\cdot)a}$, ... stanno a indicare i segni + o -).

Notiamo anche che, essendo (indici bispinoriali omessi)

$$\left[\overline{\chi^{(\cdot)}[\bar{R}|f]} \right] = \left[\chi^{(\cdot)}[\bar{R}|g] \right] = L^{-3/2} \quad ; \quad \left[\frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi} \right] = \text{momento}$$

si ha

$$[S_B^{\ddot{}}[f, g]] = \text{adimensionale}$$

come ci aspettiamo che debba essere.

L'interpretazione fisica delle ampiezze di probabilità espresse dalle (22), (23), (24), (25) verrà data nelle prossime sezioni A, B, C.

* * *

DIAGRAMMI DI FEYNMAN

Scenario:

- spazio relativistico 4-dimensionale pseudoeuclideo; punto-evento $\bar{\mathbf{R}} \equiv ct, x, y, z$;
- particella dotata di carica elettrica negativa $e = -4,8032u.e.s.$ (elettrone) o positiva $-e = +4,8032u.e.s.$ (positrone) in un campo e.m. descritto dal 4-potenziale $\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}})$;
- $\bar{\mathbf{P}}$ = parte spaziale del 4-momento della particella; r, s = spin della particella;
- $g(\bar{\mathbf{P}}, r)$ = profilo della sorgente della particella (particella in ingresso);
- $f(\bar{\mathbf{P}}, s)$ = profilo del rivelatore della particella (particella in uscita).

Obiettivi:

- calcolo dell'ampiezza di probabilità di transizione dalla sorgente al rivelatore della particella dotata di carica negativa o positiva e soggetta al potenziale $\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}})$;
- calcolo dell'ampiezza di probabilità di creazione/distruzione di una coppia elettrone/positrone.

Prima di introdurre i diagrammi di Feynman occorre richiamare il modo in cui in questo studio viene espressa l'ampiezza di probabilità di transizione di un elettrone in un campo elettromagnetico descritto dal potenziale $\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}})$.

Tale ampiezza viene presentata (v. gli studi (a) e (c)) come uno sviluppo in serie nel quale si possono prendere in considerazione tanti termini quanti si ritiene ne occorran per garantire un sufficiente grado di approssimazione.

A ogni termine dello sviluppo è associato un numero discreto, e crescente di termine in termine, di punti-evento in cui ha luogo lo scattering dell'elettrone che, in accordo col metodo sviluppato da Feynman e noto come "integrale sui cammini" o "integrale di percorso" (v. l'Appendice B dello studio (a)), si assume sia in grado di percorrere simultaneamente più cammini che hanno origine dalla sorgente che lo emette e terminano nel dispositivo che lo rivela.

Consideriamo più in dettaglio un termine generico dello sviluppo.

Esso è costituito da una somma (si tratta più precisamente di un integrale) di addendi; ogni addendo corrisponde a uno dei possibili cammini ed è composto da un bispinore rappresentativo dell'elettrone in ingresso nello spazio in cui ha luogo lo scattering, e da un bispinore rappresentativo dell'elettrone in uscita da tale spazio, separati da un prodotto di fattori rappresentativi dei punti in cui ha luogo lo scattering e del moto libero dell'elettrone fra coppie consecutive di punti di scattering.

L'integrale effettua la somma su tutti gli addendi, cioè su tutti cammini percorsi simultaneamente dall'elettrone.

Riassumendo: a ogni termine dello sviluppo corrisponde un certo numero di punti di scattering collocati nello spaziotempo; a ogni addendo di ciascun termine corrisponde un cammino rappresentativo di una scelta di tanti punti-evento di scattering quanti sono quelli associati al termine considerato.

Ciò posto, un diagramma di Feynman è la trascrizione grafica degli integrandi contenuti negli integrali che esprimono i termini dello sviluppo di una ampiezza di probabilità.

Dunque è la trascrizione grafica non di un termine dello sviluppo, ma di un generico addendo (= integrando = cammino) dell'integrale associato al termine.

La trascrizione grafica consiste nell'associare all'integrando che compare in ciascun termine dello sviluppo una linea spezzata in corrispondenza di uno o più punti-evento.

Ciascun tratto di ogni linea spezzata in più punti-evento è compreso fra due punti-evento consecutivi nei quali l'elettrone ha subito una azione di scattering da parte del potenziale e.m. $\Phi(\mathbf{R})$, e fra i quali l'elettrone si è propagato liberamente^(*).

In ciascun tratto di ogni spezzata viene fissato un verso che può essere concorde col verso dei tempi crescenti (l'asse dei tempi crescenti, usualmente non tracciato, si assume orientato verso l'alto della pagina) o può essere concorde col verso dei tempi decrescenti.

L'elettrone può essere dotato di energia positiva o negativa.

Se è dotato di energia positiva ciascun tratto viene considerato equiverso coi tempi crescenti (si usa dire che l'elettrone si muove in avanti nel tempo); se è dotato di energia negativa viene considerato equiverso coi tempi decrescenti (si usa dire che l'elettrone si muove all'indietro nel tempo).

Un elettrone a energia negativa in propagazione all'indietro nel tempo viene interpretato come un positrone a energia positiva in propagazione in avanti nel tempo.

Per un elettrone in ingresso/uscita valgono le (20).

Quale è l'utilità dei diagrammi di Feynman?

Permettono di studiare graficamente il fenomeno della diffusione di un elettrone in un campo e.m. senza che occorra introdurre le complicate espressioni matematiche che compaiono nello sviluppo della ampiezza di probabilità di transizione, espressioni che potranno essere inserite al termine dell'analisi del fenomeno considerato.

Infatti, come si è detto più sopra, all'ampiezza di probabilità di transizione dell'elettrone viene associata una somma di spezzate, ciascuna dotata di un diverso numero di tratti, essendo ogni spezzata rappresentativa di tutti i cammini dotati del medesimo numero di tratti.

^(*) *Notiamo, per inciso, che nella fig. 3 dello studio (c) è stato presentato un esempio di uso di spezzate, senza peraltro fare esplicito riferimento al metodo di Feynman.*

A) Diagrammi di Feynman per un elettrone/positrone in ingresso dalla sorgente o in uscita verso il rivelatore

I diagrammi di Feynman per i bispinori rappresentativi di un elettrone/positrone entrambi liberi e considerati in ingresso/uscita (v. eq. 20)) sono illustrati nella fig. 1 dove viene mostrato l'asse temporale t diretto verso l'alto della pagina.

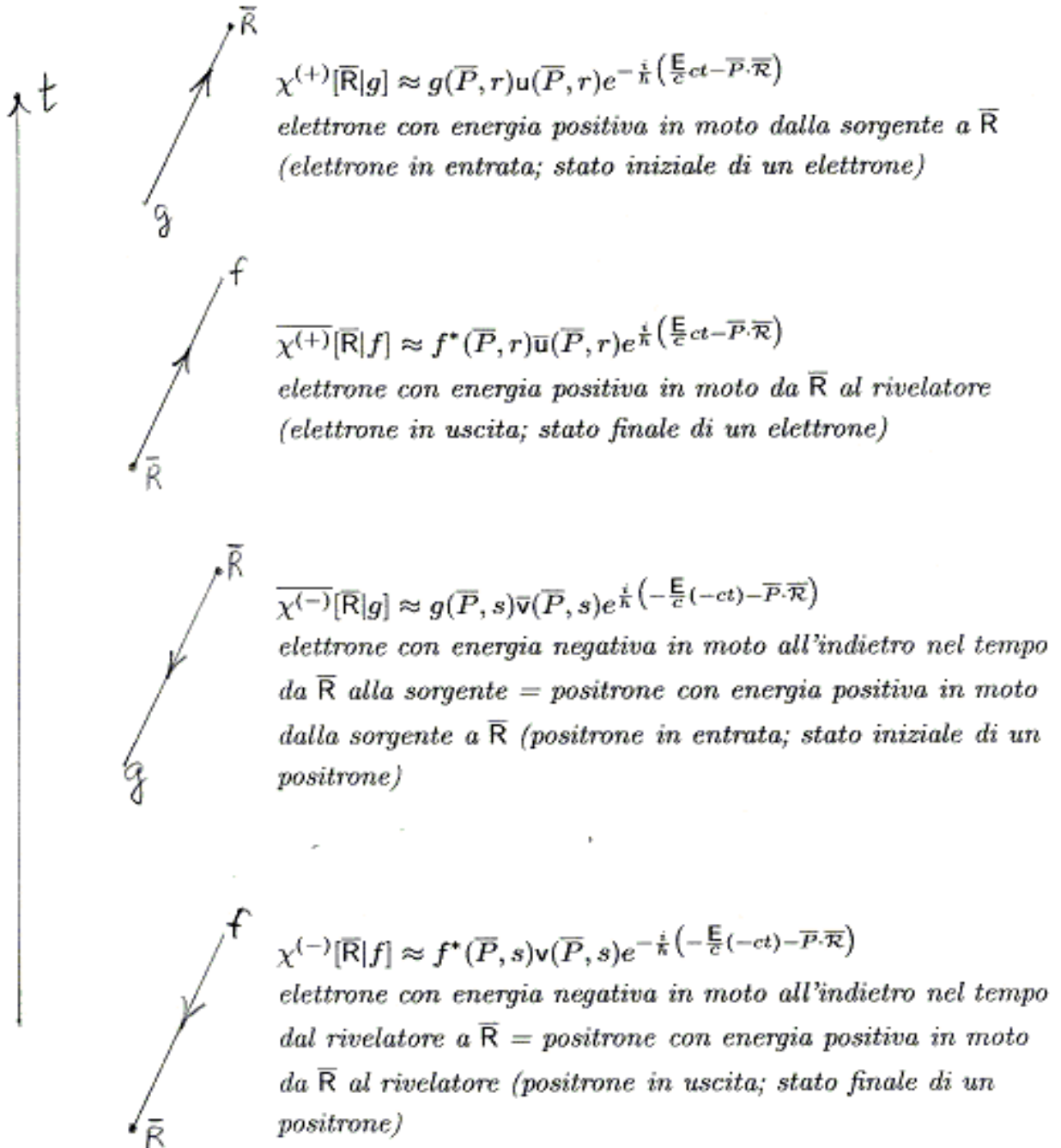


fig. 1

B) Diagrammi di Feynman relativi a processi di ordine zero

I termini di ordine 0 delle ampiezze di probabilità di transizione di un elettrone/positrone da una sorgente avente profilo g a un rivelatore avente profilo f contenuti nelle (22) e (24) ed espressi in notazione di Dirac corrispondono ad assenza di scattering e sono illustrati nella fig. 2:

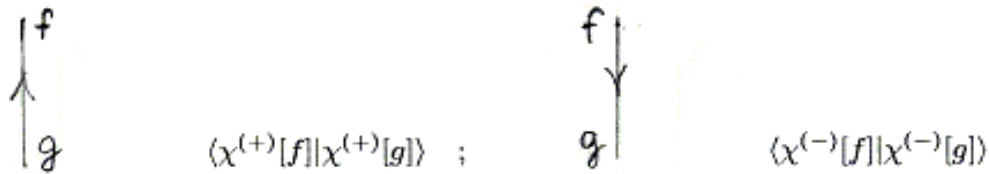


fig. 2

C) Diagrammi di Feynman relativi a processi di primo ordine

I termini di primo ordine delle ampiezze di probabilità di transizione di un elettrone/positrone in un campo elettromagnetico descritto dal potenziale $\bar{\Phi}(\bar{R})$ contenuti nelle (22), (23), (24), (25) hanno integrandi illustrati nella fig. 3 (asse dei tempi diretto verso l'alto della pagina).

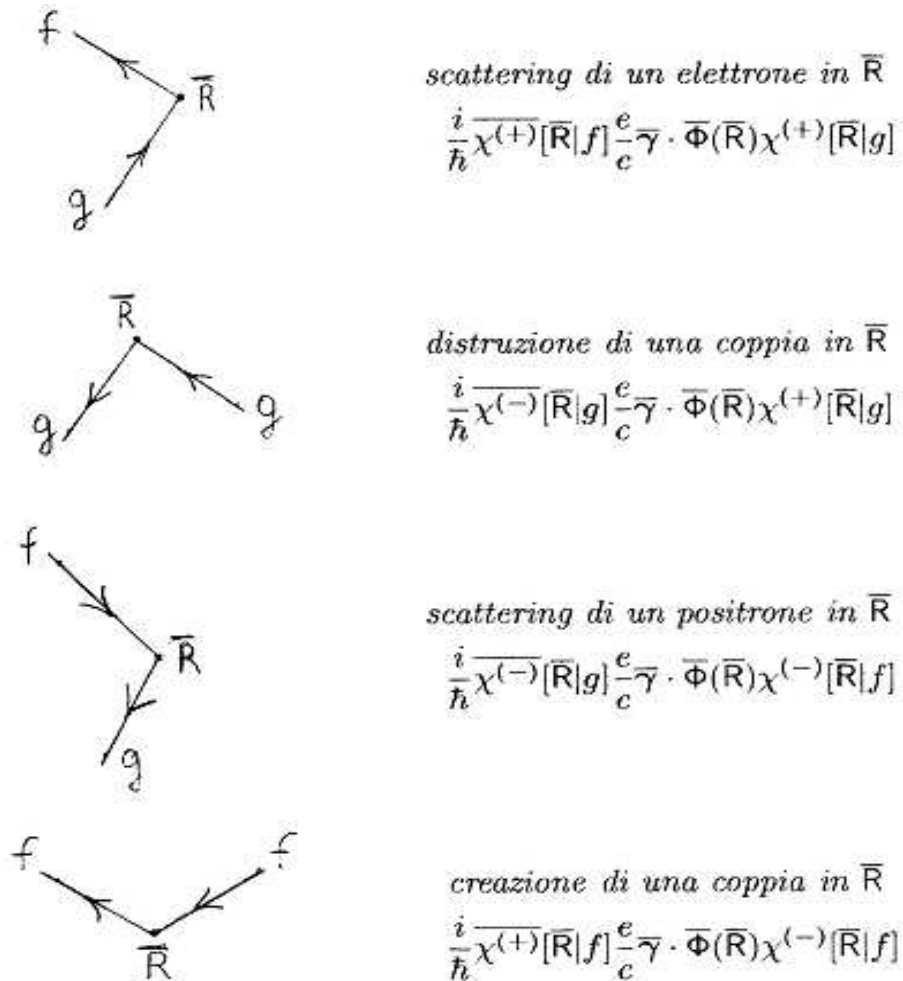


fig. 3

D) Diagrammi di Feynman relativi a processi di secondo ordine

Sono descritti da espressioni che si ricavano mediante le corrispondenze (21) e (6) dal termine scalare, adimensionale e non relativistico di ordine 2 a membro destro della (47) dello studio (c) che qui riscriviamo (i termini di ordine 0 e 1 costituiscono l'approssimazione di Born):

$$\frac{i}{\hbar^2} \int \phi^*[\bar{\mathcal{R}}, t_1 | f] \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t_1 - t_2) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}', t_2) \phi[\bar{\mathcal{R}}', t_2 | g] d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' dt_1 dt_2$$

Le corrispondenze, che qui riscriviamo, sono:

$$\chi^{(\pm)}[\bar{\mathbf{R}} | g(\bar{P}, s)] \longleftrightarrow \phi[\bar{\mathcal{R}}, t | g(\bar{p})] \quad ; \quad \overline{\chi^{(\pm)}}[\bar{\mathbf{R}} | f(\bar{P}, r)] \longleftrightarrow \phi^*[\bar{\mathcal{R}}, t | f(\bar{p})]$$

$$S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}') \longleftrightarrow \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t - t_0) \quad ; \quad \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\mathbf{R}}) \longleftrightarrow \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_1 \equiv ct_1, \bar{\mathcal{R}} \quad ; \quad \bar{\mathbf{R}}_2 \equiv ct_2, \bar{\mathcal{R}}'$$

cosicché si ottengono i seguenti termini scalari, adimensionali e relativistici

$$S_{Q,2}^{++}[f, g] = \frac{i}{\hbar^2} \int \overline{\chi^{(+)}}[\bar{\mathbf{R}}_1 | f] \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\mathbf{R}}_1) S_F(\bar{\mathbf{R}}_1 - \bar{\mathbf{R}}_2) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\mathbf{R}}_2) \chi^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}_2 | g] d\bar{\mathbf{R}}_1 d\bar{\mathbf{R}}_2 \quad (26)$$

$$S_{Q,2}^{-+}[f, g] = -\frac{i}{\hbar^2} \int \overline{\chi^{(-)}}[\bar{\mathbf{R}}_1 | f] \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\mathbf{R}}_1) S_F(\bar{\mathbf{R}}_1 - \bar{\mathbf{R}}_2) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\mathbf{R}}_2) \chi^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}_2 | g] d\bar{\mathbf{R}}_1 d\bar{\mathbf{R}}_2 \quad (27)$$

$$S_{Q,2}^{-\bar{2}}[f, g] = -\frac{i}{\hbar^2} \int \overline{\chi^{(-)}}[\bar{\mathbf{R}}_1 | f] \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\mathbf{R}}_1) S_F(\bar{\mathbf{R}}_1 - \bar{\mathbf{R}}_2) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\mathbf{R}}_2) \chi^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}_2 | g] d\bar{\mathbf{R}}_1 d\bar{\mathbf{R}}_2 \quad (28)$$

$$S_{Q,2}^{+-}[f, g] = \frac{i}{\hbar^2} \int \overline{\chi^{(+)}}[\bar{\mathbf{R}}_1 | f] \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\mathbf{R}}_1) S_F(\bar{\mathbf{R}}_1 - \bar{\mathbf{R}}_2) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\mathbf{R}}_2) \chi^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}_2 | g] d\bar{\mathbf{R}}_1 d\bar{\mathbf{R}}_2 \quad (29)$$

Il simbolo Q sta a indicare *quasi-ampiezza di probabilità di transizione*, una denominazione il cui significato apparirà chiaro fra poco.

Volendo, per maggior chiarezza, introdurre gli indici bispinoriali si ottiene per ognuna delle quasi-ampiezze di probabilità di transizione la verifica che si tratta di uno scalare (i punti in $S_{Q,2}^{\ddot{a}}$, $\chi^{(\cdot)a}$, ... stanno a indicare i segni + o -):

$$S_{Q,2}^{\ddot{a}}[f, g] = \frac{i}{\hbar^2} \int \overline{\chi^{(\cdot)a}}[\bar{\mathbf{R}}_1 | f] \frac{e}{c} (\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\mathbf{R}}_1))_a^b S_{F,b}^c(\bar{\mathbf{R}}_1 - \bar{\mathbf{R}}_2) \frac{e}{c} (\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\mathbf{R}}_2))_c^d \chi_d^{(\cdot)}[\bar{\mathbf{R}}_2 | g] d\bar{\mathbf{R}}_1 d\bar{\mathbf{R}}_2$$

Inoltre, poiché $[\overline{\chi^{(\cdot)}}] = [\chi^{(\cdot)}] = L^{-3/2}$, $[S_F] = L^{-3}$ e $[\frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}] = \text{momento}$, si verifica che

$$[S_{Q,2}^{\ddot{a}}[f, g]] = \text{adimensionale}$$

Ciò posto, riscriviamo la (26) tenendo conto della (9):

$$S_{Q,2}^{++}[f, g] = \frac{i}{\hbar^2} \int \overline{\chi^{(+)}[\bar{R}_1|f]} \frac{e}{c} \vec{\gamma} \cdot \vec{\Phi}(\bar{R}_1) \theta(x_1^0 - x_2^0) S^{(+)}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) \frac{e}{c} \vec{\gamma} \cdot \vec{\Phi}(\bar{R}_2) \chi^{(+)}[\bar{R}_2|g] d\bar{R}_1 d\bar{R}_2 +$$

$$- \frac{i}{\hbar^2} \int \overline{\chi^{(+)}[\bar{R}_1|f]} \frac{e}{c} \vec{\gamma} \cdot \vec{\Phi}(\bar{R}_1) \theta(x_2^0 - x_1^0) S^{(-)}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) \frac{e}{c} \vec{\gamma} \cdot \vec{\Phi}(\bar{R}_2) \chi^{(+)}[\bar{R}_2|g] d\bar{R}_1 d\bar{R}_2$$

ovvero

$$S_{Q,2}^{++}[f, g] = \frac{i}{\hbar^2} \int_{t_1 > t_2} \overline{\chi^{(+)}[\bar{R}_1|f]} \frac{e}{c} \vec{\gamma} \cdot \vec{\Phi}(\bar{R}_1) S^{(+)}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) \frac{e}{c} \vec{\gamma} \cdot \vec{\Phi}(\bar{R}_2) \chi^{(+)}[\bar{R}_2|g] d\bar{R}_1 d\bar{R}_2 +$$

$$- \frac{i}{\hbar^2} \int_{t_2 > t_1} \overline{\chi^{(+)}[\bar{R}_1|f]} \frac{e}{c} \vec{\gamma} \cdot \vec{\Phi}(\bar{R}_1) S^{(-)}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) \frac{e}{c} \vec{\gamma} \cdot \vec{\Phi}(\bar{R}_2) \chi^{(+)}[\bar{R}_2|g] d\bar{R}_1 d\bar{R}_2 \quad (30)$$

I propagatori $S^{(+)}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)$ e $S^{(-)}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2)$ che compaiono nella (30) sono descritti nella fig. 4 (asse dei tempi diretto verso l'alto della pagina).

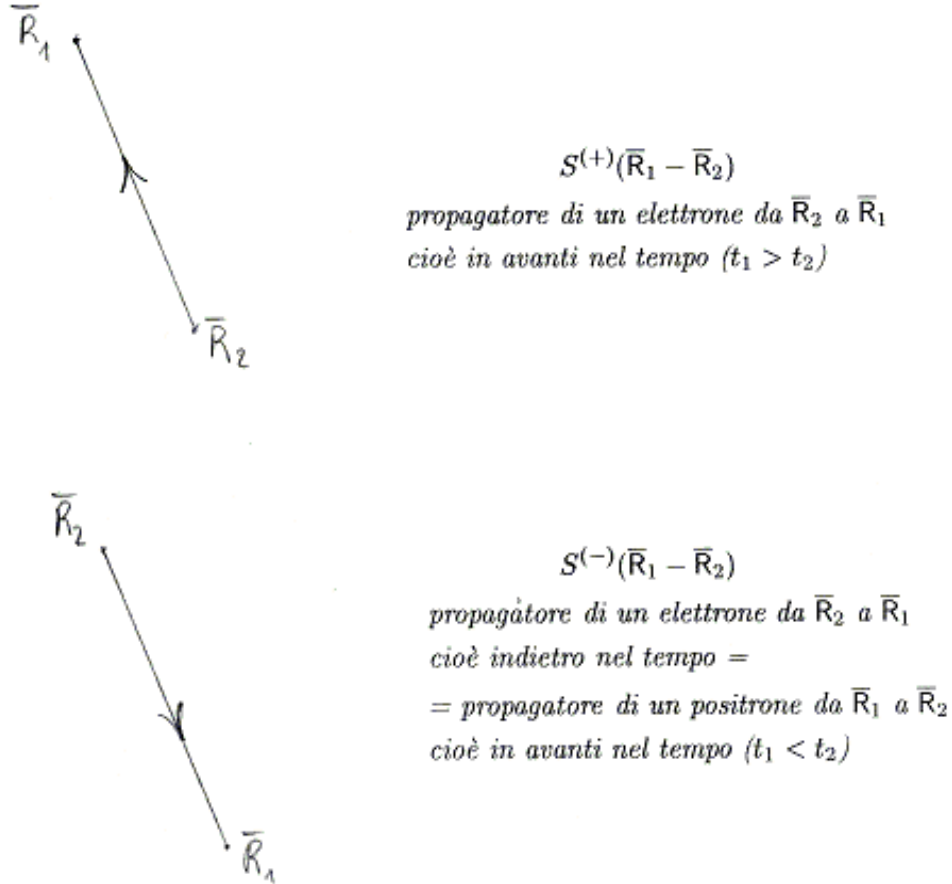
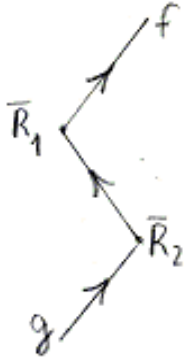


fig. 4

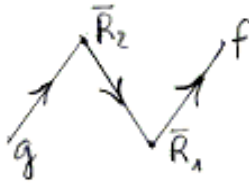
Gli integrandi dei due termini a membro destro della (30) corrispondono ai primi due diagrammi della fig. 5. Un procedimento simile può essere ripetuto per le quasi-ampiezze di probabilità di transizione espresse dalle (27), (28) e (29) e si ritrovano così gli ultimi due diagrammi della fig. 5 e i quattro diagrammi di fig. 6 (asse dei tempi diretto verso l'alto della pagina).



scattering di un elettrone

$$\frac{i}{\hbar^2} \overline{\chi^{(+)}}[\bar{R}_1|f] \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \Phi(\bar{R}_1) S^{(+)}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \Phi(\bar{R}_2) \chi^{(+)}[\bar{R}_2|g]$$

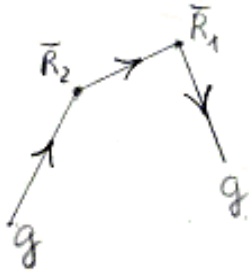
$$t_1 > t_2$$



distruzione di una coppia in \bar{R}_2 ; creazione di una coppia in \bar{R}_1

$$\frac{i}{\hbar^2} \overline{\chi^{(+)}}[\bar{R}_1|f] \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \Phi(\bar{R}_1) S^{(-)}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \Phi(\bar{R}_2) \chi^{(+)}[\bar{R}_2|g]$$

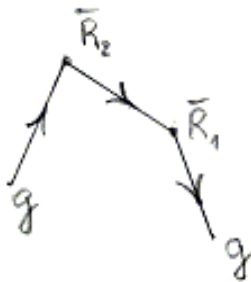
$$t_1 < t_2$$



distruzione di una coppia in \bar{R}_1

$$\frac{i}{\hbar^2} \overline{\chi^{(-)}}[\bar{R}_1|g] \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \Phi(\bar{R}_1) S^{(+)}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \Phi(\bar{R}_2) \chi^{(+)}[\bar{R}_2|g]$$

$$t_1 > t_2$$



distruzione di una coppia in \bar{R}_2

$$\frac{i}{\hbar^2} \overline{\chi^{(-)}}[\bar{R}_1|g] \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \Phi(\bar{R}_1) S^{(-)}(\bar{R}_1 - \bar{R}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \Phi(\bar{R}_2) \chi^{(+)}[\bar{R}_2|g]$$

$$t_1 < t_2$$

fig. 5

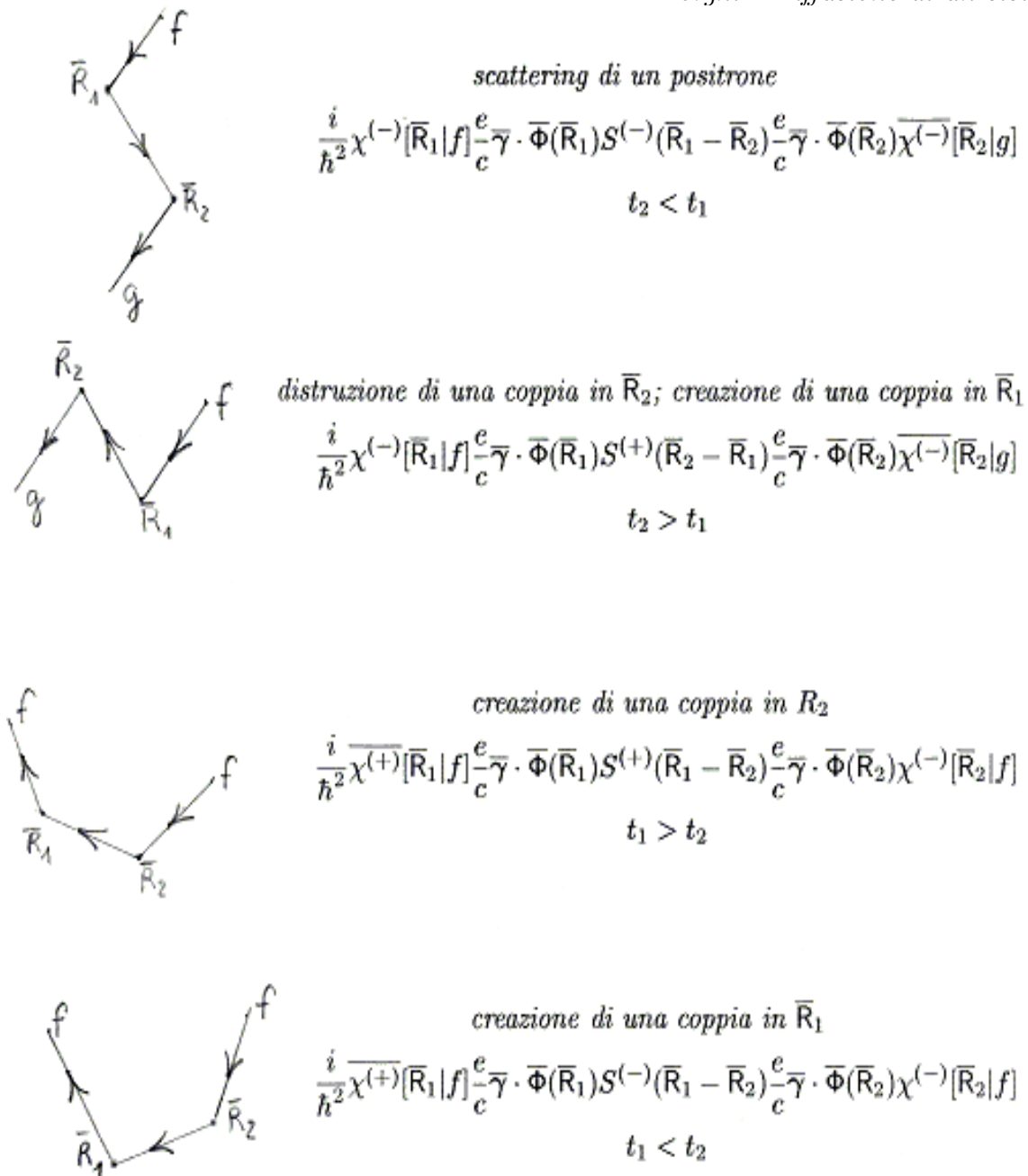


fig. 6

Come si leggono questi diagrammi?

Consideriamo ad esempio il secondo diagramma della fig. 6. Il punto da cui si deve partire è il bispinore $\overline{\chi^{(-)}}[\bar{R}_2|g]$. Dal terzo diagramma della fig. 1 apprendiamo che tale bispinore è associato a un elettrone con energia negativa in moto a ritroso nel tempo da \bar{R}_2 alla sorgente descritta da un pacchetto d'onde con profilo $g(\bar{P}, r)$ e quindi può essere considerato un positrone con energia positiva in moto in avanti nel tempo dalla sorgente a \bar{R}_2 (positrone in entrata). Ma, come mostra il propagatore $S^{(+)}$ della fig. 4, in \bar{R}_2 arriva anche un elettrone appartenente alla coppia elettrone-positrone creata in \bar{R}_1 .

L'incontro in \bar{R}_2 di questo elettrone con il positrone in arrivo dalla sorgente causa la distruzione delle due particelle, mentre il positrone creato in \bar{R}_1 va verso il rivelatore descritto da un pacchetto d'onde avente profilo f , come mostra il bispinore $\chi^{(-)}[\bar{R}_1|f]$ (v. fig. 1, positrone in uscita).

* * *

Ci interessa ora definire ampiezze di probabilità di transizione per qualunque livello di approssimazione.

Riprendiamo in considerazione la funzione *scalare e non relativistica* espressa dalla (55) dello studio (a) che esprime la *ampiezza di probabilità* di una particella dotata di energia potenziale $\mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t)$ e che qui riscriviamo indicando per semplicità le integrazioni multiple con un unico simbolo di integrale

$$\begin{aligned}
 \psi(\bar{\mathcal{R}}, t) = & \phi(\bar{\mathcal{R}}, t) + \\
 & - \frac{1}{\hbar} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \phi(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) d\bar{\mathcal{R}}_1 dt_1 + \\
 & + \frac{1}{\hbar^2} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}_2, t_1 - t_2) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_2, t_2) \phi(\bar{\mathcal{R}}_2, t_2) \cdot \\
 & \cdot d\bar{\mathcal{R}}_1 d\bar{\mathcal{R}}_2 dt_1 dt_2 + \\
 & - \frac{1}{\hbar^3} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}_2, t_1 - t_2) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_2, t_2) \cdot \\
 & \cdot \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_2 - \bar{\mathcal{R}}_3, t_2 - t_3) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_3, t_3) \phi(\bar{\mathcal{R}}_3, t_3) d\bar{\mathcal{R}}_1 d\bar{\mathcal{R}}_2 d\bar{\mathcal{R}}_3 dt_1 dt_2 dt_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{31}$$

e, servendoci delle corrispondenze (21), (6) e (2) che qui riscriviamo

$$\chi^{(\pm)}[\bar{\mathcal{R}}|g] \longleftrightarrow \phi(\bar{\mathcal{R}}, t) \quad ; \quad S_F(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}') \longleftrightarrow \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t - t_0) \quad ; \quad \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathcal{R}}) \longleftrightarrow \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t)$$

introduciamo la seguente funzione *bispinoriale e relativistica* che esprime la *ampiezza di probabilità* di un elettrone dotato di carica e e soggetto al 4-potenziale $\bar{\Phi}(\bar{\mathcal{R}})$

$$\begin{aligned}
 \Psi_F^\pm[\bar{\mathcal{R}}|g] = & \chi^{(\pm)}[\bar{\mathcal{R}}|g] + \\
 & - \frac{1}{\hbar} \int S_F(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathcal{Z}}_1) \chi^{(\pm)}[\bar{\mathcal{Z}}_1|g] d\bar{\mathcal{Z}}_1 + \\
 & + \frac{1}{\hbar^2} \int S_F(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathcal{Z}}_1) S_F(\bar{\mathcal{Z}}_1 - \bar{\mathcal{Z}}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathcal{Z}}_2) \chi^{(\pm)}[\bar{\mathcal{Z}}_2|g] d\bar{\mathcal{Z}}_1 d\bar{\mathcal{Z}}_2 + \\
 & - \frac{1}{\hbar^3} \int S_F(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathcal{Z}}_1) S_F(\bar{\mathcal{Z}}_1 - \bar{\mathcal{Z}}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathcal{Z}}_2) S_F(\bar{\mathcal{Z}}_2 - \bar{\mathcal{Z}}_3) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathcal{Z}}_3) \chi^{(\pm)}[\bar{\mathcal{Z}}_3|g] \cdot \\
 & \cdot d\bar{\mathcal{Z}}_1 d\bar{\mathcal{Z}}_2 d\bar{\mathcal{Z}}_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{32}$$

ovvero

$$\Psi_F^\pm[\bar{\mathcal{R}}|g] = \Psi_{F,0}^\pm + \Psi_{F,1}^\pm + \Psi_{F,2}^\pm + \dots \tag{33}$$

La (32) è l'espansione di

$$\Psi_F^\pm[\bar{\mathcal{R}}|g] = \chi^{(\pm)}[\bar{\mathcal{R}}|g] - \frac{1}{\hbar} \int S_F(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathcal{Z}}_1) \Psi_F^\pm[\bar{\mathcal{Z}}_1|g] d\bar{\mathcal{Z}}_1 \tag{34}$$

come si può verificare facilmente definendo la (34) per $\bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{Z}}_1$, sostituendo $\bar{\mathcal{Z}}_1$ già in essa presente con $\bar{\mathcal{Z}}_2$

$$\Psi_F^\pm[\bar{\mathcal{Z}}_1|g] = \chi^{(\pm)}[\bar{\mathcal{Z}}_1|g] - \frac{1}{\hbar} \int S_F(\bar{\mathcal{Z}}_1 - \bar{\mathcal{Z}}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathcal{Z}}_2) \Psi_F^\pm[\bar{\mathcal{Z}}_2|g] d\bar{\mathcal{Z}}_2$$

e inserendo quest'ultima nell'integrando a membro destro della (34)

$$\begin{aligned} \Psi_F^\pm[\bar{R}|g] &= \chi^{(\pm)}[\bar{R}|g] - \frac{1}{\hbar} \int S_F(\bar{R} - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \chi^\pm[\bar{Z}_1|g] d\bar{Z}_1 + \\ &+ \frac{1}{\hbar^2} \int S_F(\bar{R} - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) S_F(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \Psi_F^\pm[\bar{Z}_2|g] d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 \end{aligned} \quad (35)$$

e ancora definendo la (34) per $\bar{R} = \bar{Z}_2$, sostituendo \bar{Z}_2 già in essa presente con \bar{Z}_3

$$\Psi_F^\pm[\bar{Z}_2|g] = \chi^{(\pm)}[\bar{Z}_2|g] - \frac{1}{\hbar} \int S_F(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_3) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_3) \Psi_F^\pm[\bar{Z}_3|g] d\bar{Z}_3 \quad (36)$$

e inserendo quest'ultima nella (35)

$$\begin{aligned} \Psi_F^\pm[\bar{R}|g] &= \chi^{(\pm)}[\bar{R}|g] - \frac{1}{\hbar} \int S_F(\bar{R} - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \chi^{(\pm)}[\bar{Z}_1|g] d\bar{Z}_1 + \\ &+ \frac{1}{\hbar^2} \int S_F(\bar{R} - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) S_F(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \chi^{(\pm)}[\bar{Z}_2|g] d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 + \\ &- \frac{1}{\hbar^3} \int S_F(\bar{R} - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) S_F(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) S_F(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_3) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_3) \Psi_F^\pm[\bar{Z}_3|g] d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 d\bar{Z}_3 \end{aligned} \quad (37)$$

ecc..., e si ritrova così la (32).

Notiamo che in essa compaiono bispinori di primo ordine in entrambi i membri.

Infatti sotto ciascun segno di integrale i bispinori di secondo ordine $\bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_k)$ (v. eq. (85) dello studio "Rappresentazioni spinoriali del gruppo di Lorentz") saturano i loro due indici con quelli di S_F e rimane così solo il bispinore di primo ordine $\chi^{(\pm)}$.

Possiamo a questo punto definire le seguenti *quasi-ampiezze di probabilità di transizione* come prodotto scalare di $\Psi_F^\pm[\bar{R}|g]$ con $\chi^{(\pm)}[\bar{R}|f]$, prodotto che in notazione di Dirac diviene $\langle \chi^{(\pm)}[f] | \Psi_F^\pm[g] \rangle$ cioè:

$$\begin{aligned} S_Q^{++}[f, g] &= \langle \chi^{(+)}[f] | \Psi_F^+[g] \rangle \\ S_Q^{-+}[f, g] &= \langle \chi^{(-)}[f] | \Psi_F^+[g] \rangle \\ S_Q^{--}[f, g] &= \langle \chi^{(-)}[f] | \Psi_F^-[g] \rangle \\ S_Q^{+-}[f, g] &= \langle \chi^{(+)}[f] | \Psi_F^-[g] \rangle \end{aligned} \quad (38)$$

Tenendo conto della (9) si può scrivere:

$$\begin{aligned} \Psi_F^\pm[\bar{R}|g] &= \chi^{(\pm)}[\bar{R}|g] - \frac{1}{\hbar} \int S_F(\bar{R} - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \chi^{(\pm)}[\bar{Z}_1|g] d\bar{Z}_1 + \dots \\ &= \chi^{(\pm)}[\bar{R}|g] - \frac{1}{\hbar} \int \left\{ \theta(t - t_1) S^{(+)}(\bar{R} - \bar{Z}_1) - \theta(t_1 - t) S^{(-)}(\bar{R} - \bar{Z}_1) \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \chi^{(\pm)}[\bar{Z}_1|g] d\bar{Z}_1 + \dots \quad (39) \\ &= \chi^{(\pm)}[\bar{R}|g] - \frac{1}{\hbar} \int_{t > t_1} S^{(+)}(\bar{R} - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \chi^{(\pm)}[\bar{Z}_1|g] d\bar{Z}_1 + \\ &\quad + \frac{1}{\hbar} \int_{t < t_1} S^{(-)}(\bar{R} - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \chi^{(\pm)}[\bar{Z}_1|g] d\bar{Z}_1 + \dots \end{aligned}$$

e in quest'ultima si può esplicitare il doppio segno \pm ottenendo così i 2 diagrammi della fig. 7 e i 4 diagrammi della fig. 8 (asse dei tempi diretto verso l'alto della pagina).

Ampiezze di probabilità di ordine 0

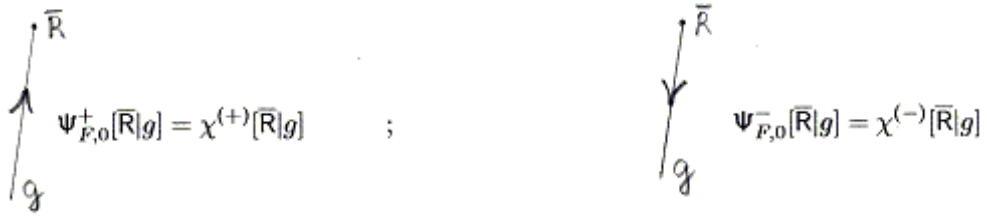


fig. 7

Ampiezze di probabilità di primo ordine

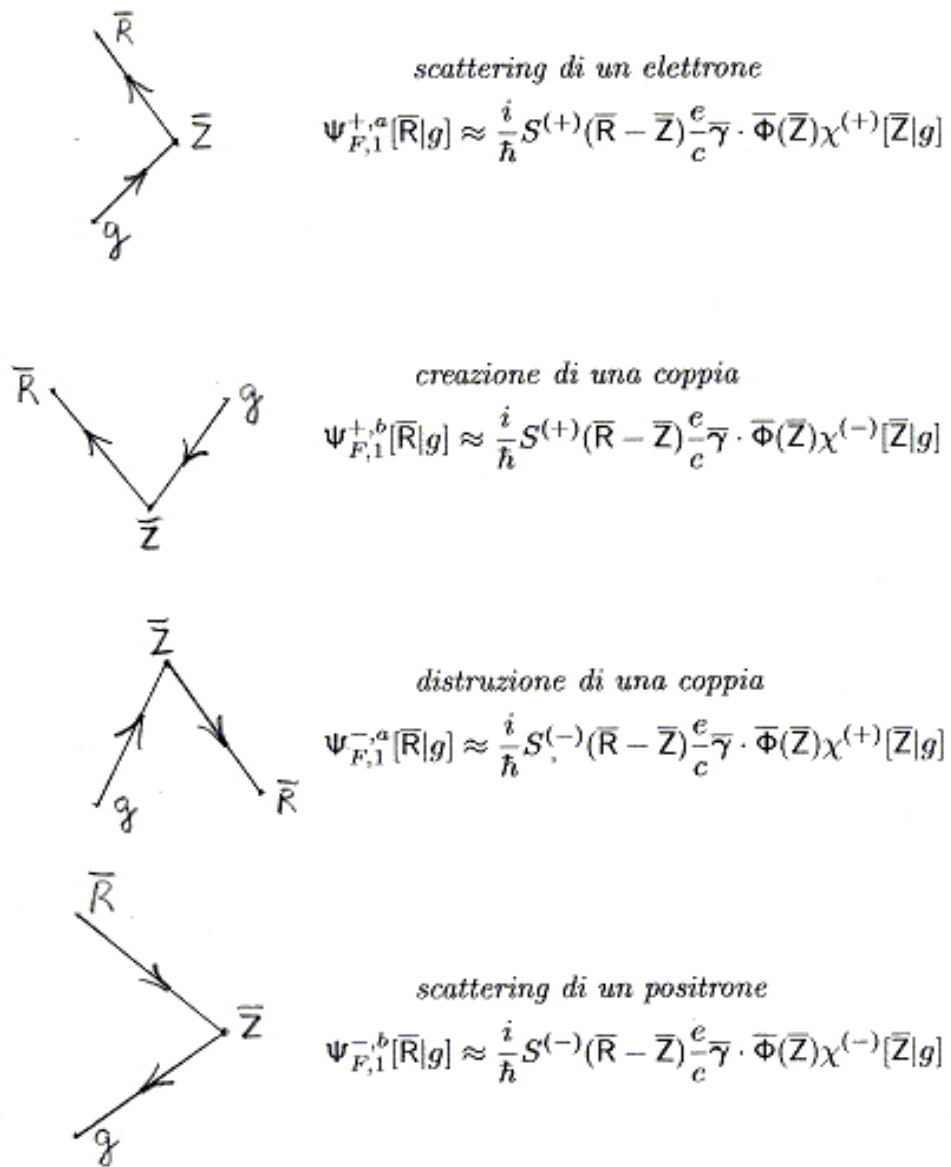


fig. 8

Le Ψ_F^+ e Ψ_F^- espresse dalla (34) possono essere sommate, cosicché, ponendo

$$\Psi_F(\bar{\mathbf{R}}) = \Psi_F^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}|g] + \Psi_F^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}|g] \quad (40)$$

e tenendo conto della (19) si può scrivere

$$\Psi_F(\bar{\mathbf{R}}) = \chi_F(\bar{\mathbf{R}}) - \frac{1}{\hbar} \int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}) \Psi_F(\bar{\mathbf{Z}}) d\bar{\mathbf{Z}} \quad (41)$$

Questa equazione integrale è equivalente all'equazione di Dirac in Ψ_F :

$$\left\{ -\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot i\hbar \square_{\mathbf{R}} + m_0 c + \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{R}}) \right\} \Psi_F(\bar{\mathbf{R}}) = 0 \quad (42)$$

* * *

Ora consideriamo nello sviluppo (32) della Ψ_F^+ il termine di secondo ordine

$$\Psi_{F,2}^+ = \frac{1}{\hbar^2} \int S_F(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) S_F(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_2) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_2) \chi^{(+)}[\bar{\mathbf{Z}}_2|g] d\bar{\mathbf{Z}}_1 d\bar{\mathbf{Z}}_2 \quad (43)$$

Questo, tenuto conto della (9), può essere scritto così:

$$\begin{aligned} \Psi_{F,2}^+ &= \frac{1}{\hbar^2} \int \left\{ \theta(t - t_1) S^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) - \theta(t_1 - t) S^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \right\} \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) \cdot \\ &\cdot \left\{ \theta(t_1 - t_2) S^{(+)}(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_2) - \theta(t_2 - t_1) S^{(-)}(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_2) \right\} \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_2) \chi^{(+)}[\bar{\mathbf{Z}}_2|g] d\bar{\mathbf{Z}}_1 d\bar{\mathbf{Z}}_2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \int \left\{ \theta(t - t_1) S^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) \theta(t_1 - t_2) S^{(+)}(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_2) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_2) + \right. \\ &\quad - \theta(t - t_1) S^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) \theta(t_2 - t_1) S^{(-)}(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_2) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_2) + \\ &\quad - \theta(t_1 - t) S^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) \theta(t_1 - t_2) S^{(+)}(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_2) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_2) + \\ &\quad \left. + \theta(t_1 - t) S^{(-)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) \theta(t_2 - t_1) S^{(-)}(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_2) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_2) \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \chi^{(+)}[\bar{\mathbf{Z}}_2|g] d\bar{\mathbf{Z}}_1 d\bar{\mathbf{Z}}_2 \\ &= \Psi_{F,2}^{+,a} + \Psi_{F,2}^{+,b} + \Psi_{F,2}^{+,c} + \Psi_{F,2}^{+,d} \end{aligned} \quad (44)$$

Gli integrandi di questi quattro bispinori di primo ordine sono rappresentati nella fig. 9 dove l'asse dei tempi si intende diretto verso l'alto della pagina.

Fissiamo l'attenzione su

$$\Psi_{F,2}^{+,b} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{t_2 > t_1} S^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_1) S^{(-)}(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_2) \frac{e}{c} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{Z}}_2) \chi^{(+)}[\bar{\mathbf{Z}}_2|g] d\bar{\mathbf{Z}}_1 d\bar{\mathbf{Z}}_2 \quad (45)$$

che rappresenta, come indica il corrispondente diagramma di Feynman (v. fig. 9), lo stato di due elettroni che coesistono nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2 .

Infatti in $\bar{\mathbf{Z}}_1$ viene creata una coppia elettrone/positrone e, mentre l'elettrone va verso il rivelatore (movimento descritto dal propagatore $S^{(+)}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{Z}}_1)$), il positrone va verso $\bar{\mathbf{Z}}_2$ (movimento descritto dal propagatore $S^{(-)}(\bar{\mathbf{Z}}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_2)$) dove incontra l'elettrone in uscita dalla sorgente con conseguente distruzione della coppia.

Ampiezze di probabilità di secondo ordine

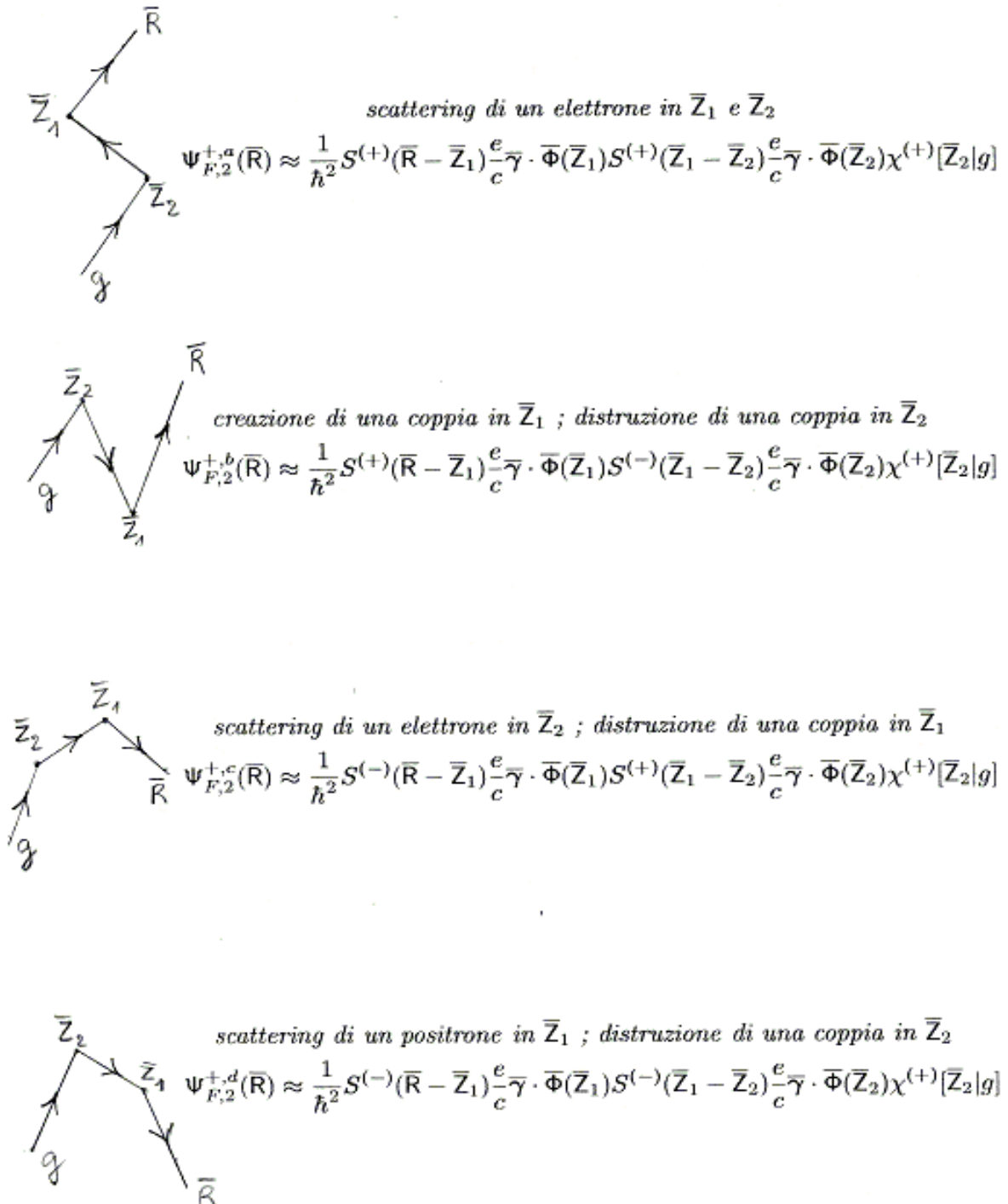


fig. 9

Dunque un elettrone esce dalla sorgente mentre un altro elettrone, quello che fa parte della coppia elettrone/positrone creata in \bar{Z}_1 , va verso il rivelatore.

Nella (44) questo è l'unico termine associato alla esistenza simultanea di più particelle identiche. Infatti, ad esempio, al termine $\Psi_{F,2}^{+,c}$ sono associate due particelle che sono simultaneamente esistenti, ma non sono identiche perché una è un elettrone e l'altra è un positrone.

La ragione per cui abbiamo preso in considerazione il termine $\Psi_{F,2}^{+,b}$ sta nel fatto che le particelle quantistiche identiche sono indistinguibili, e ciò comporta che il bispinore di stato di elettroni coesistenti deve essere antisimmetrico (v. la sezione 1.5 della Seconda Parte dello studio "Reinterpretare l'Elettromagnetismo maxwelliano per spiegare la Meccanica quantistica").

La (45) è antisimmetrica? Per verificarlo riscriviamola così:

$$\Psi_{F,2}^{+,b} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_2 > t_1} iS^{(+)}(\bar{R} - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) iS^{(-)}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \chi^{(+)}[\bar{Z}_2|g] d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 \quad (46)$$

Introducendo le relazioni di completezza (A29) dell'Appendice A si ottiene

$$\begin{aligned} \Psi_{F,2}^{+,b} = & \frac{1}{\hbar^8} \int_{t_2 > t_1} \sum_r \int \chi^{(+)}(\bar{R}; \bar{P}_1, r) \overline{\chi^{(+)}(\bar{Z}_1; \bar{P}_1, r)} \frac{cd\bar{P}_1}{2E(\bar{P})} \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \cdot \\ & \cdot \sum_s \int \chi^{(-)}(\bar{Z}_1; \bar{P}_2, s) \overline{\chi^{(-)}(\bar{Z}_2; \bar{P}_2, s)} \frac{cd\bar{P}_2}{2E(\bar{P})} \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \chi^{(+)}[\bar{Z}_2|g] d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 \quad (47) \end{aligned}$$

e si vede quindi che i due elettroni che coesistono durante l'intervallo di tempo da t_1 a t_2 hanno coordinate \bar{R} e \bar{Z}_2 e il loro stato, espresso da

$$\chi^{(+)}(\bar{R}; \bar{P}_1, r) \chi^{(+)}[\bar{Z}_2|g], \quad (48)$$

non è antisimmetrico rispetto a \bar{R} e \bar{Z}_2 , un fatto, questo, ovviamente inaccettabile.

Per risolvere il problema basta antisimmetrizzare sottraendo dalla (47) il termine seguente ottenuto mediante scambio nella (47) di \bar{R} con \bar{Z}_2 in $\chi^{(+)}(\bar{R}; \bar{P}_1, r)$ e $\chi^{(+)}[\bar{Z}_2|g]$:

$$\begin{aligned} \Psi_{F,2}^{+,b}(\bar{R}) = & \frac{1}{\hbar^8} \int_{t_2 > t_1} \sum_r \int \chi^{(+)}(\bar{Z}_2; \bar{P}_1, r) \overline{\chi^{(+)}(\bar{Z}_1; \bar{P}_1, r)} \frac{cd\bar{P}_1}{2E(\bar{P})} \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \cdot \\ & \cdot \sum_s \int \chi^{(-)}(\bar{Z}_1; \bar{P}_2, s) \overline{\chi^{(-)}(\bar{Z}_2; \bar{P}_2, s)} \frac{cd\bar{P}_2}{2E(\bar{P})} \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \chi^{(+)}[\bar{R}|g] d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 \end{aligned}$$

da cui, poiché $\chi^{(+)}[\bar{R}|g]$ è diventato una costante di integrazione

$$\begin{aligned} \Psi_{F,2}^{+,b}(\bar{R}) = & \frac{1}{\hbar^2} \chi^{(+)}[\bar{R}|g] \cdot \\ & \cdot \int \sum_r \frac{1}{\hbar^3} \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} \chi^{(+)}(\bar{Z}_2; \bar{P}_1, r) \overline{\chi^{(+)}(\bar{Z}_1; \bar{P}_1, r)} d\bar{P}_1 \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \cdot \\ & \cdot \sum_s \frac{1}{\hbar^3} \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} \chi^{(-)}(\bar{Z}_1; \bar{P}_2, s) \overline{\chi^{(-)}(\bar{Z}_2; \bar{P}_2, s)} d\bar{P}_2 \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 \quad (49) \end{aligned}$$

Ricordando ancora le (A29) dell'Appendice A si può scrivere

$$\Psi_{F,2}^{+,\bar{b}} = \chi^{(+)}[\bar{R}|g] \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_2 > t_1} iS^{(+)}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) iS^{(-)}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 \quad (50)$$

Introducendo gli indici bispinoriali si ottiene

$$\Psi_{F,2}^{+,\bar{b},a} = \chi^{(+),a}[\bar{R}|g] \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_2 > t_1} iS^{(+),c}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} (\bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1))_c^d iS^{(-),e}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} (\bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2))_e^b d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2$$

Possiamo così constatare che l'integrando è un prodotto di quattro matrici 4x4 del tipo $M_b^c N_c^d L_d^e J_e^b = Tr(MN LJ)$ perciò

$$\Psi_{F,2}^{+,\bar{b}} = -\chi^{(+)}[\bar{R}|g] \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_2 > t_1} Tr \left\{ S^{(+)}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) S^{(-)}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \right\} d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 \quad (51)$$

Il diagramma di Feynman della $\Psi_{F,2}^{+,\bar{b}}(\bar{R})$ è illustrato nella fig. 10 dove, come di consueto, il tempo si intende crescente verso la parte alta della pagina e dove si è fatto riferimento alle fig. 1 e 3

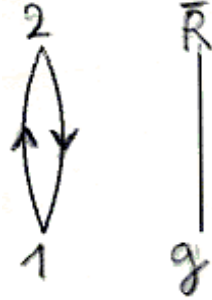


fig. 10

Si può introdurre la seguente quantità adimensionale, priva di indici bispinoriali e tensoriali e indipendente da coordinate spaziotemporali (l'indice (2) fa riferimento a $\Psi_{F,2}^{+,\bar{b}}$):

$$C^{(2)}[\bar{\Phi}] = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{t_2 > t_1} Tr \left\{ S^{(+)}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) S^{(-)}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \right\} d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 \quad (52)$$

o anche, tenendo presente la funzione S_F definita nella (9):

$$C^{(2)}[\bar{\Phi}] = \frac{1}{2} \frac{1}{\hbar^2} \int Tr \left\{ S_F(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) S_F(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \right\} d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 \quad (53)$$

Infatti in quest'ultima l'integrando può essere riscritto così:

$$\begin{aligned}
 & Tr \left\{ S_F(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) S_F(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \right\} = \\
 & = Tr \left\{ \left(\theta(t_1 - t_2) S^{(+)}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) - \theta(t_2 - t_1) S^{(-)}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \right) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \cdot \right. \\
 & \quad \left. \cdot \left(\theta(t_2 - t_1) S^{(+)}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) - \theta(t_1 - t_2) S^{(-)}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \right) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \right\} \\
 & = Tr \left\{ \theta(t_1 - t_2) S^{(+)}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \theta(t_2 - t_1) S^{(+)}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) + \right. \\
 & \quad - \theta(t_1 - t_2) S^{(+)}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \theta(t_1 - t_2) S^{(-)}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) + \\
 & \quad - \theta(t_2 - t_1) S^{(-)}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \theta(t_2 - t_1) S^{(+)}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) + \\
 & \quad \left. + \theta(t_2 - t_1) S^{(-)}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) \theta(t_1 - t_2) S^{(-)}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \right\}
 \end{aligned}$$

Ma in questa ultima espressione il primo e l'ultimo termine si annullano perché contengono sia $\theta(t_1 - t_2)$ che $\theta(t_2 - t_1)$, il secondo termine può essere riscritto scambiando l'indice 1 con l'indice 2 e il terzo termine può essere riscritto ruotando l'ordine dei fattori e si ottengono così due termini uguali e quindi

$$\begin{aligned}
 & Tr \left\{ S_F(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) S_F(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \right\} = \\
 & = -2\theta(t_2 - t_1) S^{(+)}(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) \theta(t_2 - t_1) S^{(-)}(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2)
 \end{aligned}$$

e si verifica così che la (53) equivale alla (52).

In definitiva la (51) può essere scritta così

$$\Psi_{F,2}^{+, \bar{b}}(\bar{\mathbf{R}}) = C^{(2)}[\bar{\Phi}] \chi^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}|g] \quad ; \quad [C^{(2)}] = \textit{adimensionale} \quad (54)$$

Risultati uguali si trovano esaminando il termine $\Psi_{F,2}^-$, ed espressioni del tipo $C^{(3)}, C^{(4)}, \dots$ possono essere determinate esaminando $\Psi_{F,3}^\pm, \Psi_{F,4}^\pm, \dots$ cosicché diviene possibile definire un fattore

$$C[\bar{\Phi}] = C^{(0)} + C^{(1)} + C^{(2)} + \dots + C^{(n)} + \dots \quad ; \quad [C] = \textit{adimensionale} \quad (55)$$

essendo

$$\begin{aligned}
 & C^{(0)} = 1 \\
 & C^{(1)} = \frac{1}{\hbar} \int Tr \left\{ S_F(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_1) \frac{e}{c} \gamma^\mu \right\} \Phi_\mu(\bar{Z}_1) d\bar{Z}_1 = 0 \\
 & C^{(2)} = \frac{1}{2\hbar^2} \int Tr \left\{ \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) S_F(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) S_F(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \right\} d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 \\
 & C^{(3)} = \frac{1}{3\hbar^3} \int Tr \left\{ \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_1) S_F(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_2) S_F(\bar{Z}_2 - \bar{Z}_3) \frac{e}{c} \bar{\gamma} \cdot \bar{\Phi}(\bar{Z}_3) \cdot \right. \\
 & \quad \left. \cdot S_F(\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1) \right\} d\bar{Z}_1 d\bar{Z}_2 d\bar{Z}_3 = 0 \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned} \quad (56)$$

dove si noti che i termini diversi da zero sono solo quelli con indici pari, e cioè $C^{(0)}$, $C^{(2)}$, $C^{(4)}$, $C^{(6)}$ ecc.

Si può dunque concludere che per tener conto dell'indistinguibilità degli elettroni basta sostituire nelle espressioni delle quasi-ampiezze di probabilità di transizione (v. eq. (38)) le $|\Psi_F^\pm[g]\rangle$ con $|C[\overline{\Phi}]\Psi_F^\pm[g]\rangle$, che possiamo indicare con $|\Psi^\pm[g]\rangle$, ottenendo così le seguenti ampiezze di probabilità di transizione:

$$\begin{aligned} S^{++}[f, g] &= \langle \chi^{(+)}[f] | C[\overline{\Phi}]\Psi_F^+[g] \rangle = \langle \chi^{(+)}[f] | \Psi^+[g] \rangle \\ S^{-+}[f, g] &= \langle \chi^{(-)}[f] | C[\overline{\Phi}]\Psi_F^+[g] \rangle = \langle \chi^{(-)}[f] | \Psi^+[g] \rangle \\ S^{--}[f, g] &= \langle \chi^{(-)}[f] | C[\overline{\Phi}]\Psi_F^-[g] \rangle = \langle \chi^{(-)}[f] | \Psi^-[g] \rangle \\ S^{+-}[f, g] &= \langle \chi^{(+)}[f] | C[\overline{\Phi}]\Psi_F^-[g] \rangle = \langle \chi^{(+)}[f] | \Psi^-[g] \rangle \end{aligned} \quad (57)$$

o, in alternativa, poiché $C[\overline{\Phi}]$ è un fattore costante, cioè indipendente da $\overline{\mathbf{R}}$ (ma dipendente da $\overline{\Phi}$):

$$\begin{aligned} S^{++}[f, g] &= \langle \chi^{(+)}[f] | C[\overline{\Phi}]\Psi_F^+[g] \rangle = C[\overline{\Phi}] \langle \chi^{(+)}[f] | \Psi_F^+[g] \rangle \\ S^{-+}[f, g] &= \langle \chi^{(-)}[f] | C[\overline{\Phi}]\Psi_F^+[g] \rangle = C[\overline{\Phi}] \langle \chi^{(-)}[f] | \Psi_F^+[g] \rangle \\ S^{--}[f, g] &= \langle \chi^{(-)}[f] | C[\overline{\Phi}]\Psi_F^-[g] \rangle = C[\overline{\Phi}] \langle \chi^{(-)}[f] | \Psi_F^-[g] \rangle \\ S^{+-}[f, g] &= \langle \chi^{(+)}[f] | C[\overline{\Phi}]\Psi_F^-[g] \rangle = C[\overline{\Phi}] \langle \chi^{(+)}[f] | \Psi_F^-[g] \rangle \end{aligned} \quad (58)$$

Riesce ora chiaro il significato del simbolo $Q \equiv$ “quasi-ampiezza di probabilità di transizione” presente nelle (26), (27), (28), (29) e (36): esso sta a indicare che nel calcolo di tali ampiezze non si è tenuto conto del coefficiente $C[\overline{\Phi}]$ che, si noti, non compare nei termini di ampiezza di probabilità di transizione presenti nella approssimazione di Born.

In definitiva, se ci limitiamo a considerare un ordine massimo non superiore a 2, la $|\Psi^\pm[g]\rangle$ che compare nelle (58), rappresentata nelle coordinate, assume l'espressione

$$\Psi^\pm[\overline{\mathbf{R}}|g] = \left(C^{(0)} + C^{(1)} + C^{(2)} \right) \Psi_F^\pm[\overline{\mathbf{R}}|g]$$

ovvero, tenendo conto della (56),

$$\Psi^\pm[\overline{\mathbf{R}}|g] = (1 + C^{(2)}) \Psi_F^\pm[\overline{\mathbf{R}}|g] \quad (59)$$

Abbiamo così ottenuto un risultato tanto importante quanto inatteso: *il fattore $C[\overline{\Phi}]$, che nella (59) vale approssimativamente $1 + C^{(2)}$, sta a indicare che, per effetto del campo e.m. $\overline{\Phi}$, si ha scattering di un elettrone e, contemporaneamente, si ha anche creazione e annichilazione di coppie elettrone-positrone* (di cui nella fig. 10 è stata data, servendosi dei diagrammi di Feynman, una rappresentazione grafica).

Il prodotto $C[\overline{\Phi}]\Psi_F^\pm$ è antisimmetrico.

Il fattore $C[\overline{\Phi}]$ non dipende dalle coordinate ed è inoltre privo di indici bispinoriali, perciò deve essere considerato una caratteristica tipica dei processi che coinvolgono elettroni e che avvengono in presenza di un campo elettromagnetico esterno.

Tali processi avvengono indipendentemente dagli stati iniziali e finali delle particelle.

Il fattore $C[\overline{\Phi}]$, come mostrano le (57), esprime l'ampiezza di probabilità di tali processi, ed è perciò detto *ampiezza di probabilità di transizione vuoto-vuoto*.

Notiamo che in assenza del campo e. m. (ordine di perturbazione zero) l'ampiezza di probabilità di transizione vuoto-vuoto è 1, il che significa che in assenza di un campo elettromagnetico esterno non vi è né creazione né annichilazione di coppie, e il vuoto rimane vuoto.

Anche nel caso di un campo e. m. statico l'ampiezza di probabilità è uguale a 1 perché un campo statico non può trasmettere energia a una coppia elettrone-positone, cosicché questa non viene creata.

Questo spiega perché il tentativo fatto da Dirac di applicare la sua equazione allo studio dell'atomo di idrogeno ha avuto successo ancora prima che venisse scoperto il significato profondo della sua equazione.

Appendice A

Introduciamo i due seguenti operatori hermitiani:

$$\Lambda_+ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c}{\sqrt{(\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c)(\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c)}} \right) \quad (\text{A1})$$

$$\Lambda_- = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c}{\sqrt{(\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c)(\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c)}} \right) \quad (\text{A2})$$

Ma

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c)(\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c) &= (\bar{\alpha} \cdot \bar{P})(\bar{\alpha} \cdot \bar{P}) + (\bar{\alpha} \cdot \bar{P})\beta m_0 c + \beta m_0 c(\bar{\alpha} \cdot \bar{P}) + \beta\beta m_0^2 c^2 \\ &= (\bar{\alpha} \cdot \bar{P})(\bar{\alpha} \cdot \bar{P}) + m_0 c(\bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\alpha}) \cdot \bar{P} + \beta\beta m_0^2 c^2 \end{aligned}$$

da cui, ricordando le (141), (142) e (143) dello studio (b), cioè:

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha} \cdot \bar{P})(\bar{\alpha} \cdot \bar{P}) &= \frac{1}{2} P_k P_l (\alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k) = P_k P_l \delta^{kl} = \bar{P}^2 \\ \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\alpha} &= 0 \\ \beta\beta &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

si ottiene

$$(\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c)(\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c) = \bar{P}^2 + m_0^2 c^2 \quad (\text{A3})$$

perciò

$$\Lambda_+ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c}{\sqrt{\bar{P}^2 + m_0^2 c^2}} \right) ; \quad \Lambda_- = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c}{\sqrt{\bar{P}^2 + m_0^2 c^2}} \right) \quad (\text{A4})$$

Nello spazio dei momenti in cui ci siamo posti per risolvere la (211) dello studio (b), cioè

$$\mathcal{H}_r |u(\bar{P})\rangle = a |u(\bar{P})\rangle,$$

la rappresentazione di Λ_+ e Λ_- è la seguente (gli apici indicano autovalori):

$$\Lambda_+(\bar{P}') = \frac{1}{2} + \frac{\bar{\alpha} \cdot \bar{P}' + \beta m_0 c}{2 \frac{E(\bar{P}')}{c}} ; \quad \Lambda_-(\bar{P}') = \frac{1}{2} - \frac{\bar{\alpha} \cdot \bar{P}' + \beta m_0 c}{2 \frac{E(\bar{P}')}{c}} \quad (\text{A5})$$

dove si è posto

$$\frac{E(\bar{P}')}{c} = \sqrt{\bar{P}'^2 + m_0^2 c^2} \quad (\text{A6})$$

Le (A4) e (A5) definiscono operatori di proiezione perché (omettendo, per semplicità, di scrivere gli apici)

$$\Lambda_{\pm}^{\dagger}(\bar{P}) = \Lambda_{\pm}(\bar{P}) ; \quad \Lambda_{\pm}^2(\bar{P}) = \Lambda_{\pm}(\bar{P}) \quad (\text{A7})$$

e inoltre si ha

$$\Lambda_+(\bar{P}) + \Lambda_-(\bar{P}) = 1 \quad (\text{A8})$$

Ora osserviamo che applicando $\Lambda_+(\bar{P})$ al bispinore di stato $\mathbf{u}(\bar{P})$ e moltiplicando a sinistra per $c\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c^2$ si ottiene:

$$\begin{aligned} (c\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c^2) \Lambda_+(\bar{P}) \mathbf{u}(\bar{P}) &= (c\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{c\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c^2}{2E(\bar{P})} \right) \mathbf{u}(\bar{P}) \\ &= \frac{c\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c^2}{2} \mathbf{u}(\bar{P}) + \frac{(c\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c^2)^2}{2E(\bar{P})} \mathbf{u}(\bar{P}) \end{aligned}$$

perciò, per la (A3):

$$(c\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c^2) \Lambda_+(\bar{P}) \mathbf{u}(\bar{P}) = \frac{c\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c^2}{2} \mathbf{u}(\bar{P}) + \frac{1}{2} E(\bar{P}) \mathbf{u}(\bar{P}) = E(\bar{P}) \Lambda_+(\bar{P}) \mathbf{u}(\bar{P})$$

e in definitiva:

$$(\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c) \Lambda_+(\bar{P}) \mathbf{u}(\bar{P}) = \frac{E(\bar{P})}{c} \Lambda_+(\bar{P}) \mathbf{u}(\bar{P}) \quad (\text{A9})$$

D'altra parte si ha dalla (218) dello studio (b)

$$(\bar{\alpha} \cdot \bar{P} + \beta m_0 c) \mathbf{u}(\bar{P}) = + \frac{E(\bar{P})}{c} \mathbf{u}(\bar{P})$$

perciò, confrontando con la (A9) si può scrivere

$$\Lambda_+(\bar{P}) \mathbf{u}(\bar{P}) = \mathbf{u}(\bar{P}) \quad (\text{A10})$$

e analogamente si trova

$$\Lambda_-(\bar{P}) \mathbf{u}(\bar{P}) = \mathbf{v}(\bar{P}) \quad (\text{A11})$$

cosicché si può concludere che Λ_+ e Λ_- sono operatori che proiettano lo spazio cui appartiene il bispinore di stato \mathbf{u} rispettivamente in uno spazio cui appartiene il bispinore di stato \mathbf{u} (a energia positiva) e in uno spazio cui appartiene il bispinore di stato \mathbf{v} (a energia negativa).

Si ha ovviamente

$$\Lambda_+(\bar{P}) \mathbf{u}(\bar{P}) = \mathbf{u}(\bar{P}) , \quad \Lambda_+(\bar{P}) \mathbf{v}(\bar{P}) = 0 \quad ; \quad \Lambda_-(\bar{P}) \mathbf{u}(\bar{P}) = 0 , \quad \Lambda_-(\bar{P}) \mathbf{v}(\bar{P}) = \mathbf{v}(\bar{P}) \quad (\text{A12})$$

* * *

Si usa talvolta riferirsi, in luogo degli operatori (A4), ai seguenti operatori che sono espressi in funzione di $\bar{\gamma}$ invece di $\bar{\alpha}$ e β

$$\Lambda_+ = \frac{\bar{\gamma} \cdot \bar{P} + m_0 c}{2m_0 c} \quad ; \quad \Lambda_- = \frac{-\bar{\gamma} \cdot \bar{P} + m_0 c}{2m_0 c} \quad (\text{A13})$$

e sono dotati delle proprietà seguenti:

$$(\Lambda_+)^2 = \Lambda_+ \quad ; \quad (\Lambda_-)^2 = \Lambda_- \quad (\text{A14})$$

$$\Lambda_+ \Lambda_- = 0 = \Lambda_- \Lambda_+ \quad (\text{A15})$$

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = 1 \quad (\text{A16})$$

tipiche degli operatori di proiezione. Nello spazio di momenti si ha (gli apici indicano autovalori):

$$\Lambda_+(\bar{P}') = \frac{\bar{\gamma} \cdot \bar{P}' + m_0 c}{2m_0 c} \quad ; \quad \Lambda_-(\bar{P}') = \frac{-\bar{\gamma} \cdot \bar{P}' + m_0 c}{2m_0 c} \quad (\text{A17})$$

* * *

Dalla relazione

$$\sum_r \{u_a(\bar{P}, r) \bar{u}^b(\bar{P}, r) - v_a(\bar{P}, r) \bar{v}^b(\bar{P}, r)\} = 2m_0 c \delta_a^b$$

che può essere verificata sostituendo in esse le (249), (250), (251) e (252) dello studio (b) e le loro coniugate di Dirac, si ricava, moltiplicando per $\Lambda_+(\bar{P})$ (v. eq. (A13)):

$$\Lambda_{+a}^c(\bar{P}) \sum_r \{u_c(\bar{P}, r) \bar{u}^b(\bar{P}, r) - v_c(\bar{P}, r) \bar{v}^b(\bar{P}, r)\} = 2m_0 c \Lambda_{+a}^c \delta_c^b$$

ovvero

$$\sum_r \{\Lambda_{+a}^c u_c(\bar{P}, r) \bar{u}^b(\bar{P}, r) - \Lambda_{+a}^c v_c(\bar{P}, r) \bar{v}^b(\bar{P}, r)\} = 2m_0 c \Lambda_{+a}^b$$

e infine, ricordando la (A12), si ottiene

$$\sum_r u_a(\bar{P}, r) \bar{u}^b(\bar{P}, r) = 2m_0 c \Lambda_{+a}^b$$

e analogo ragionamento può essere fatto moltiplicando per Λ_- cosicché

$$-\sum_s v_a(\bar{P}, s) \bar{v}^b(\bar{P}, s) = 2m_0 c \Lambda_{-a}^b$$

Tenendo presenti le (A13) se ne ricavano le *relazioni di completezza* dei bispinori u e v ($a, b = 1, 2, 3, 4$)

$$\sum_r u_a(\bar{P}, r) \bar{u}^b(\bar{P}, r) = (\bar{\gamma} \cdot \bar{P} + m_0 c)_a^b \quad (\text{A18})$$

$$\sum_s v_a(\bar{P}, s) \bar{v}^b(\bar{P}, s) = (\bar{\gamma} \cdot \bar{P} - m_0 c)_a^b \quad (\text{A19})$$

Si tratta di relazioni operatoriali espresse fra elementi di matrici 4x4.

Moltiplichiamo la prima per $e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot \bar{R}} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot \bar{R}'}$ e la seconda per $e^{-\frac{i}{\hbar} (-\bar{P}) \cdot \bar{R}} e^{\frac{i}{\hbar} (-\bar{P}) \cdot \bar{R}'}$:

$$\sum_r u_a(\bar{P}, r) e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot \bar{R}} \bar{u}^b(\bar{P}, r) e^{\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot \bar{R}'} = (\bar{\gamma} \cdot \bar{P} + m_0 c)_a^b e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot (\bar{R} - \bar{R}')} \quad (\text{A20})$$

$$\sum_s v_a(\bar{P}, s) e^{-\frac{i}{\hbar} (-\bar{P}) \cdot \bar{R}} \bar{v}^b(\bar{P}, s) e^{\frac{i}{\hbar} (-\bar{P}) \cdot \bar{R}'} = -(\bar{\gamma} \cdot (-\bar{P}) + m_0 c)_a^b e^{-\frac{i}{\hbar} (-\bar{P}) \cdot (\bar{R} - \bar{R}')} \quad (\text{A21})$$

e, tenendo presenti le (15) e (17), integriamo rispetto a \bar{P} nel modo seguente (indici bisipinoriali omissi):

$$\begin{aligned} \sum_r \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\bar{P})} \chi^{(+)}(\bar{R}, \bar{P}, r) \bar{\chi}^{(-)}(\bar{R}', \bar{P}, r) d\bar{P} &= \\ &= (\bar{\gamma} \cdot i\hbar \square_R + m_0 c) \frac{1}{\hbar^3} \int_{P_0 > 0} \frac{c}{2E(\bar{P})} e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot (\bar{R} - \bar{R}')} d\bar{P} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_s \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\bar{P})} \chi^{(-)}(\bar{R}, \bar{P}, s) \bar{\chi}^{(+)}(\bar{R}', \bar{P}, s) d\bar{P} &= \\ &= -(\bar{\gamma} \cdot (-i\hbar \square_R) + m_0 c) \frac{1}{\hbar^3} \int_{P_0 < 0} \frac{c}{2E(\bar{P})} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot (\bar{R} - \bar{R}')} d\bar{P} \end{aligned}$$

Queste due equazioni, tenendo conto della (18), possono essere riscritte così:

$$\begin{aligned} \sum_r \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\bar{P})} \chi^{(+)}(\bar{R}, \bar{P}, r) \overline{\chi^{(+)}(\bar{R}', \bar{P}, r)} d\bar{P} &= \\ &= (\bar{\gamma} \cdot i\hbar \square_R + m_0 c) \frac{1}{\hbar^3} \int_{P_0 > 0} \frac{c}{2E(\bar{P})} e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot (\bar{R} - \bar{R}')} d\bar{P} \quad (\text{A22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_s \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\bar{P})} \chi^{(-)}(\bar{R}, \bar{P}, s) \overline{\chi^{(-)}(\bar{R}', \bar{P}, s)} d\bar{P} &= \\ &= -(\bar{\gamma} \cdot (-i\hbar \square_R) + m_0 c) \frac{1}{\hbar^3} \int_{P_0 < 0} \frac{c}{2E(\bar{P})} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot (\bar{R} - \bar{R}')} d\bar{P} \quad (\text{A23}) \end{aligned}$$

Ora poniamo

$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(\bar{R} - \bar{R}'; m_0) &= \frac{i}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\bar{P})} e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot (\bar{R} - \bar{R}')} d\bar{P} \\ \Delta^{(-)}(\bar{R} - \bar{R}'; m_0) &= -\frac{i}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\bar{P})} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot (\bar{R} - \bar{R}')} d\bar{P} \end{aligned} \quad ; \quad [\Delta^{(\pm)}] = L^{-3} \cdot \text{momento}^{-1} \quad (\text{A24})$$

Notiamo che

$$\Delta^{(-)}(\bar{R} - \bar{R}'; m_0) = \Delta^{(+)*}(\bar{R} - \bar{R}'; m_0) = -\frac{i}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\bar{P})} e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot (\bar{R}' - \bar{R})} d\bar{P}$$

e quindi

$$\Delta^{(-)}(\bar{R} - \bar{R}'; m_0) = -\Delta^{(+)}(\bar{R}' - \bar{R}; m_0) \quad (\text{A25})$$

Tenendo conto delle (A24) le (A22) e (A23) diventano

$$\begin{aligned} \sum_r \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\overline{P})} \chi^{(+)}(\overline{R}, \overline{P}, r) \overline{\chi^{(+)}(\overline{R}', \overline{P}, r)} d\overline{P} &= -i(\overline{\gamma} \cdot i\hbar \square_R + m_0 c) \Delta^{(+)}(\overline{R} - \overline{R}'; m_0) \\ \sum_s \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\overline{P})} \chi^{(-)}(\overline{R}, \overline{P}, s) \overline{\chi^{(-)}(\overline{R}', \overline{P}, s)} d\overline{P} &= -i(\overline{\gamma} \cdot (-i\hbar \square_R) + m_0 c) \Delta^{(-)}(\overline{R} - \overline{R}'; m_0) \end{aligned} \quad (\text{A26})$$

Poniamo infine (indici bispinoriali reintrodotti)

$$\begin{aligned} S^{(+)}{}_a{}^b(\overline{R} - \overline{R}') &= (\overline{\gamma} \cdot i\hbar \square_R + m_0 c)_a{}^b \Delta^{(+)}(\overline{R} - \overline{R}'; m_0) \\ S^{(-)}{}_a{}^b(\overline{R} - \overline{R}') &= (\overline{\gamma} \cdot (-i\hbar \square_R) + m_0 c)_a{}^b \Delta^{(-)}(\overline{R} - \overline{R}'; m_0) \end{aligned} \quad ; \quad [S^{(\pm)}] = L^{-3} \quad (\text{A27})$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} S^{(-)}(\overline{R} - \overline{R}') &= (\overline{\gamma} \cdot (-i\hbar \square_R) + m_0 c) \Delta^{(+)*}(\overline{R} - \overline{R}'; m_0) \\ &= (\overline{\gamma} \cdot (-i\hbar \square_R) + m_0 c) \frac{-i}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\overline{P})} e^{\frac{i}{\hbar} \overline{P} \cdot (\overline{R} - \overline{R}')} d\overline{P} \\ &= -(\overline{\gamma} \cdot i\hbar \square_{R'} + m_0 c) \frac{i}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\overline{P})} e^{-\frac{i}{\hbar} \overline{P} \cdot (\overline{R}' - \overline{R})} d\overline{P} \end{aligned}$$

e quindi

$$S^{(-)}(\overline{R} - \overline{R}') = -S^{(+)}(\overline{R}' - \overline{R}) \quad (\text{A28})$$

Tenendo conto delle (A27) le (A26) diventano

$$\begin{aligned} \sum_r \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\overline{P})} \chi^{(+)}{}_a(\overline{R}, \overline{P}, r) \overline{\chi^{(+)}{}^b(\overline{R}', \overline{P}, r)} d\overline{P} &= -i S^{(+)}{}_a{}^b(\overline{R} - \overline{R}') \\ \sum_s \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{c}{2E(\overline{P})} \chi^{(-)}{}_a(\overline{R}, \overline{P}, s) \overline{\chi^{(-)}{}^b(\overline{R}', \overline{P}, s)} d\overline{P} &= -i S^{(-)}{}_a{}^b(\overline{R} - \overline{R}') \end{aligned} \quad (\text{A29})$$

Queste sono ancora relazioni di completezza espresse in funzione dei bispinori $\chi^{(\pm)}(\overline{R}, \overline{P}, r)$ e $\overline{\chi^{(\pm)}}(\overline{R}, \overline{P}, r)$ (v. eq. (15) e (17)).

Vale la notevole relazione

$$S^{(\pm)}(\overline{R} - \overline{R}'; t - t')_{t=t'} = \gamma^0 \delta(\overline{R} - \overline{R}') \quad (\text{A30})$$

Appendice B

Dall'eq. (262) dello studio (b) riportiamo il bispinore di primo ordine $\Psi(\bar{\mathbf{R}})$ soluzione dell'equazione di Dirac per un elettrone libero (indici bispinoriali omissi)

$$\Psi(\bar{\mathbf{R}}) = \frac{1}{\hbar^{3/2}} \left\{ \sum_r \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_u(\bar{P}, r) u(\bar{P}, r) e^{-\frac{i}{\hbar}(+\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} + \sum_s \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_v^*(\bar{P}, s) v(\bar{P}, s) e^{-\frac{i}{\hbar}(-\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} \right\} d\bar{P} \quad (\text{B1})$$

Poniamo

$$\chi^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}|g_u] = \frac{1}{\hbar^{3/2}} \sum_r \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_u(\bar{P}, r) u(\bar{P}, r) e^{-\frac{i}{\hbar}(+\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} d\bar{P} ; [\chi^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}|g_u]] = L^{-3/2} \quad (\text{B2})$$

$$\chi^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}|g_v] = \frac{1}{\hbar^{3/2}} \sum_s \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_v^*(\bar{P}, s) v(\bar{P}, s) e^{-\frac{i}{\hbar}(-\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} d\bar{P} ; [\chi^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}|g_v]] = L^{-3/2} \quad (\text{B3})$$

cosicché

$$\Psi(\bar{\mathbf{R}}) = \chi^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}|g_u] + \chi^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}|g_v] ; [\Psi] = L^{-3/2} \quad (\text{B4})$$

Un'altra posizione alla quale talvolta si fa riferimento è la seguente:

$$\chi^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, r) = u(\bar{P}, r) e^{-\frac{i}{\hbar}(+\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} ; \chi^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, s) = v(\bar{P}, s) e^{-\frac{i}{\hbar}(-\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} \quad (\text{B5})$$

e quindi

$$\Psi(\bar{\mathbf{R}}) = \frac{1}{\hbar^{3/2}} \left\{ \sum_r \int g_u(\bar{P}, r) \chi^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, r) + \sum_s \int g_v^*(\bar{P}, s) \chi^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{P}, s) \right\} \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} d\bar{P} \quad (\text{B6})$$

* * *

Dall'eq. (270) dello studio (b) riportiamo il bispinore $\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{R}})$ coniugato di Dirac di $\Psi(\bar{\mathbf{R}})$:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{R}}) &= \Psi^\dagger(\bar{\mathbf{R}}) \gamma^0 = \Psi^*(\bar{\mathbf{R}}) \gamma^0 ; \Psi^* \text{ complesso coniugato e trasposto di } \Psi \\ &= \frac{1}{\hbar^{3/2}} \left\{ \sum_r \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_u^*(\bar{P}, r) \bar{u}(\bar{P}, r) e^{\frac{i}{\hbar}(+\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} + \sum_s \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_v(\bar{P}, s) \bar{v}(\bar{P}, s) e^{\frac{i}{\hbar}(-\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} \right\} d\bar{P} \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

Poniamo

$$\bar{\chi}^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}|g_v] = \frac{1}{\hbar^{3/2}} \sum_s \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_v(\bar{P}, s) \bar{v}(\bar{P}, s) e^{\frac{i}{\hbar}(+\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} d\bar{P} \quad (\text{B8})$$

$$\bar{\chi}^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}|g_u] = \frac{1}{\hbar^{3/2}} \sum_r \int \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{P})}} g_u^*(\bar{P}, r) \bar{u}(\bar{P}, r) e^{\frac{i}{\hbar}(-\bar{P}) \cdot \bar{\mathbf{R}}} d\bar{P} \quad (\text{B9})$$

cosicché

$$\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{R}}) = \bar{\chi}^{(+)}[\bar{\mathbf{R}}|g_u] + \bar{\chi}^{(-)}[\bar{\mathbf{R}}|g_v] \quad ; \quad [\bar{\Psi}] = L^{-3/2} \quad (\text{B10})$$

Un'altra posizione alla quale talvolta si fa riferimento è la seguente:

$$\bar{\chi}^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}, s) = \bar{v}(\bar{\mathbf{P}}, s)e^{-\frac{i}{\hbar}(+\bar{\mathbf{P}})\cdot\bar{\mathbf{R}}} \quad ; \quad \bar{\chi}^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}, r) = \bar{u}(\bar{\mathbf{P}}, r)e^{-\frac{i}{\hbar}(-\bar{\mathbf{P}})\cdot\bar{\mathbf{R}}} \quad (\text{B11})$$

e quindi

$$\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{R}}) = \frac{1}{\hbar^{3/2}} \left\{ \sum_r \int g_u^*(\bar{\mathbf{P}}, r) \bar{\chi}^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}, r) + \sum_s \int g_v(\bar{\mathbf{P}}, s) \bar{\chi}^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}, s) \right\} \sqrt{\frac{c}{2E(\bar{\mathbf{P}})}} d\bar{\mathbf{P}} \quad (\text{B12})$$

* * *

I coniugati di Dirac dei due bispinori in (B5) sono espressi da

$$\overline{\chi^{(+)}}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}, r) = \bar{u}(\bar{\mathbf{P}}, r)e^{\frac{i}{\hbar}(+\bar{\mathbf{P}})\cdot\bar{\mathbf{R}}} \quad ; \quad \overline{\chi^{(-)}}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}, s) = \bar{v}(\bar{\mathbf{P}}, s)e^{\frac{i}{\hbar}(-\bar{\mathbf{P}})\cdot\bar{\mathbf{R}}} \quad (\text{B13})$$

Dal confronto con la (B11) risulta quindi

$$\overline{\chi^{(+)}}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}, r) = \bar{\chi}^{(-)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}, r) \quad ; \quad \overline{\chi^{(-)}}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}, s) = \bar{\chi}^{(+)}(\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{P}}, s) \quad (\text{B14})$$

e dunque il coniugato di Dirac della parte positiva (negativa) del bispinore Ψ è uguale alla parte negativa (positiva) del coniugato di Dirac del bispinore Ψ .