

Enrico Borghi

DIFFUSIONE DI PARTICELLE IN UN CAMPO DI FORZE

Richiami a studi presenti in “fiscarivisitata”

Leggendo “Diffusione di particelle in un campo di forze” si incontrano richiami ai seguenti studi

- (a) Reinterpretare l'Elettromagnetismo maxwelliano per spiegare la meccanica quantistica*
- (b) Propagatori*

che fanno parte di “fiscarivisitata” e che devono essere ben noti a chi si interessa alla diffusione di particelle seguendo la presentazione che di questo argomento viene data in questo studio.

Negli esperimenti di diffusione (scattering) delle particelle, ai quali si deve molto di ciò che attualmente sappiamo sulle strutture atomiche, un fascio opportunamente collimato di particelle viene indirizzato verso un bersaglio dal quale le particelle vengono diffuse. Le proprietà meccaniche delle particelle prima dell'interazione con il bersaglio sono note (tipicamente i momenti e le polarizzazioni) e si cerca di stabilire quale è la loro distribuzione dopo l'impatto intercettandole con opportuni rivelatori posti a distanza dal bersaglio.

Obiettivo delle misure è quindi determinare la probabilità di trovare una particella in una certa direzione rispetto alla direzione di impatto del fascio.

In questo studio ci occuperemo di diffusione elastica, cioè di una diffusione in cui le particelle interagiscono col bersaglio senza perdere o acquisire energia.

A) DIFFUSIONE DI PARTICELLE IN MECCANICA CLASSICA

Una particella avente massa m_0 si avvicina al centro O di un campo di forze centrali descritto da un potenziale \mathcal{V} ; la sua traiettoria, fuori dallo spazio intorno a O in cui il campo può esercitare una forza apprezzabile sulla particella, è una retta sulla quale la particella si muove a velocità costante v ; indichiamo con b (*parametro di impatto*) la distanza della retta da O , cioè la distanza da O della traiettoria che la particella percorrerebbe se il campo di forze fosse nullo.

Supponiamo che, una volta entrata in interazione col campo, la particella subisca una deflessione e prosegua poi nel suo moto allontanandosi dal campo di forze; la traiettoria di uscita, a distanza dal campo, è nuovamente una retta.

Il moto di una particella in un campo di forze centrali è caratterizzato, come sappiamo dall'Appendice A, da alcune grandezze che si conservano, in particolare il momento della quantità di moto (o momento angolare) e l'energia.

In conseguenza della conservazione del momento angolare la traiettoria della particella si sviluppa su un piano (v. Appendice A, sezione B) sul quale è conveniente assumere un sistema di coordinate polari r, φ con origine in O cui riferire la posizione della particella.

Il momento angolare rispetto a O della particella prima dell'interazione, cioè prima che essa divenga sensibilmente soggetta alle forze del campo, ha modulo espresso da

$$L = m_0 v b \quad (1)$$

mentre in fase di interazione si ha

$$\bar{L} = \bar{\mathcal{R}} \times m_0 \frac{d\bar{\mathcal{R}}}{dt}$$

con

$$\bar{\mathcal{R}} = x\bar{i} + y\bar{j} \quad ; \quad \frac{d\bar{\mathcal{R}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j}$$

Ora passiamo dalle coordinate cartesiane ortogonali x, y e dai versori di base \bar{i}, \bar{j} alle coordinate polari r, φ e ai versori di base $\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi$.

Le equazioni di trasformazione delle coordinate sono

$$x = r \cos \varphi \quad ; \quad y = r \sin \varphi$$

perciò

$$\overline{\mathcal{R}} = r \cos \varphi \bar{i} + r \sin \varphi \bar{j} = r(\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\mathcal{R}}}{dt} &= \frac{dr}{dt}(\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}) + r \frac{d}{dt}(\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}) \\ &= \frac{dr}{dt}(\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}) + r(-\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \bar{i} + \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \bar{j}) \end{aligned}$$

e quindi

$$\dot{\overline{\mathcal{R}}} = \dot{r}(\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}) + r(-\sin \varphi \dot{\varphi} \bar{i} + \cos \varphi \dot{\varphi} \bar{j}) \dot{\varphi}$$

Le equazioni di trasformazione dei versori di base sono (v. pag. 56 e 57 dello studio “Tensori”)

$$\bar{e}_r = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \overline{\mathcal{R}}(r, \varphi)}{\partial r} \quad ; \quad \bar{e}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \overline{\mathcal{R}}(r, \varphi)}{\partial \varphi}$$

dove $g_{11} = 1$ e $g_{22} = r^2$ sono le componenti del tensore metrico in coordinate polari perciò

$$\bar{e}_r = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j} \quad ; \quad \bar{e}_\varphi = -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j}$$

e quindi, sostituendo in $\overline{\mathcal{R}}$ e $\dot{\overline{\mathcal{R}}}$

$$\overline{\mathcal{R}} = r \bar{e}_r \quad ; \quad \dot{\overline{\mathcal{R}}} = \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\varphi} \bar{e}_\varphi \quad (2)$$

Queste sono la posizione e la velocità della particella in coordinate polari, cosicché

$$\overline{L} = \overline{\mathcal{R}} \times m_0 \dot{\overline{\mathcal{R}}} = r \bar{e}_r \times m_0 (\dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\varphi} \bar{e}_\varphi) = m_0 r^2 \dot{\varphi} \bar{e}_r \times \bar{e}_\varphi$$

e dunque, essendo \bar{e}_r e \bar{e}_φ mutuamente perpendicolari, il modulo di \overline{L} vale

$$L = m_0 r^2 \dot{\varphi}$$

Passiamo ora all'energia della particella, energia che prima dell'interazione è espressa da

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (3)$$

mentre durante l'interazione è espressa da

$$\frac{1}{2} m_0 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \mathcal{V}(r)$$

essendo $\frac{1}{2} m_0 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$ l'energia cinetica \mathcal{T} della particella. Infatti $\mathcal{T} = \frac{1}{2} m_0 \dot{\overline{\mathcal{R}}} \cdot \dot{\overline{\mathcal{R}}}$ e dalla (2) si ricava $\mathcal{T} = \frac{1}{2} m_0 (\dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\varphi} \bar{e}_\varphi) \cdot (\dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\varphi} \bar{e}_\varphi) = \frac{1}{2} m_0 (\dot{r}^2 \bar{e}_r \cdot \bar{e}_r + r^2 \dot{\varphi}^2 \bar{e}_\varphi \cdot \bar{e}_\varphi) = \frac{1}{2} m_0 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$.

Poiché il momento angolare e l'energia si conservano si può scrivere:

$$m_0 v b = m_0 r^2 \dot{\varphi} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \mathcal{V}(r) \quad (5)$$

Ora osserviamo che dalla (4) si ricava:

$$\dot{\varphi} = \frac{vb}{r^2} = -vb \frac{d\frac{1}{r}}{dr} \quad (6)$$

cosicché, ricordando che l'equazione di una curva in coordinate polari è espressa da $r = r(\varphi)$, si può scrivere

$$\dot{\varphi} = -vb \frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dr} = -vb \frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \frac{\frac{d\varphi}{dt} dt}{\frac{dr}{dt} dt} = -vb \frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}$$

perciò

$$\dot{\varphi} \dot{r} = -vb \frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \dot{\varphi}$$

e quindi

$$\dot{r} = -vb \frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}$$

Sostituiamo questa e la (6) nella (5):

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 b^2 \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\frac{1}{2} m_0 v^2 b^2}{r^2} + \mathcal{V}(r) \quad (7)$$

Poniamo $u = 1/r$ e dividiamo per $\frac{1}{2} m_0 v^2 b^2$:

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{\mathcal{V}(u)}{\frac{1}{2} m_0 v^2 b^2} - u^2 \quad (8)$$

Integrando questa equazione differenziale si ottiene $u = u(\varphi)$, che associa ad ogni angolo φ l'inverso della distanza della particella dal centro O .

Ora assumiamo che la particella abbia carica elettrica q e che le forze del campo siano coulombiane, generate da una carica q' posta in O e avente segno uguale a q . Si ha così:

$$\mathcal{V}(u) = qq'u \quad (9)$$

Il fenomeno che ci proponiamo di descrivere è quindi il moto di una particella avente massa m_0 e carica q che, avvicinandosi a un centro di forze coulombiane repulsive, viene deflessa e si allontana proseguendo il suo moto (diffusione coulombiana).

Se $b = 0$, cioè se la particella si sta avvicinando "frontalmente" al centro di forze, vi sarà un valore di r , che indichiamo con a , in corrispondenza del quale la particella si ferma, essendosi la sua energia cinetica interamente trasformata in energia elettrostatica $W(a)$ (v. eq. (180) dello studio (a)), e poi riprende a muoversi percorrendo in verso opposto la traiettoria seguita durante l'avvicinamento.

La quantità a , detta “distanza minima di avvicinamento per impatto frontale”, è definita da

$$\frac{1}{2}m_0v^2 = W(a) = \frac{qq'}{a}$$

ed è un parametro caratteristico del sistema cui si farà riferimento più tardi:

$$a = \frac{qq'}{\frac{1}{2}m_0v^2} \quad ; \quad [a] = \frac{(L^{3/2}M^{1/2}T^{-1})^2}{ML^2T^{-2}} = L \quad (10)$$

Dall'Appendice B, sulla base delle sole leggi di conservazione che qui abbiamo richiamato, e sapendo che l'energia totale è positiva, è possibile concludere (v. eq. (B37)) che la traiettoria della particella è un'iperbole il cui asse passa per O come mostra la fig. 1. Basandosi su considerazioni di geometria elementare si può affermare che tale asse è la bisettrice dell'angolo 2ψ formato dagli asintoti dei due rami dell'iperbole.

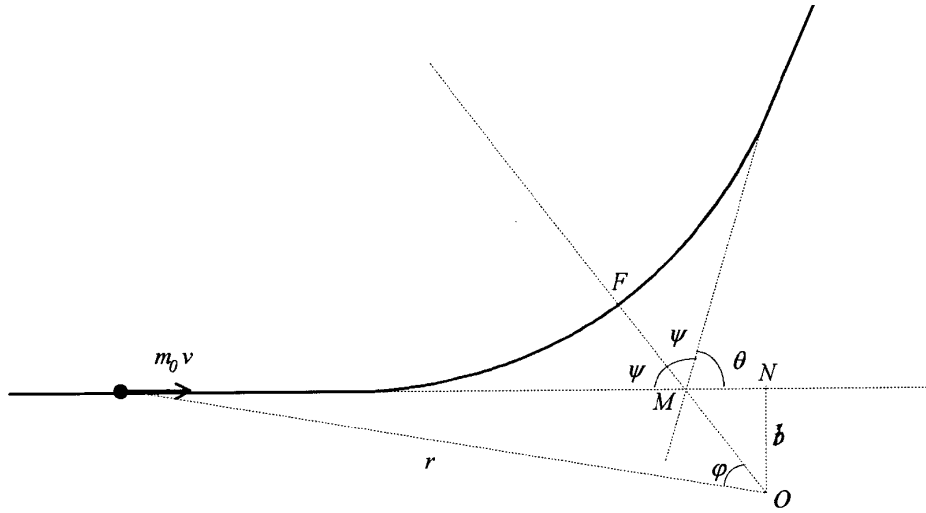


fig. 1

Preparandoci a integrare la (8), assumiamo questo asse come l'origine degli angoli φ . Inserendo la (9) nella (8) si ottiene:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{qq'}{\frac{1}{2}m_0v^2 b^2} u - u^2 \quad (11)$$

Se ora introduciamo la quantità a definita dalla (10) otteniamo

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{a}{b^2} u - u^2 = \frac{1}{b^4} \left(b^2 + \frac{a^2}{4}\right) - \left(u + \frac{a}{2b^2}\right)^2 \quad (12)$$

Poniamo

$$u' = u + \frac{a}{2b^2} \quad ; \quad k^2 = \frac{1}{b^4} \left(b^2 + \frac{b^2}{4}\right)$$

cosicché la (12) diviene

$$\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)^2 + u'^2 = k^2$$

Integrando si ottiene

$$u'(\varphi) = k \cos \varphi = \frac{1}{b^2} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \cos \varphi$$

perciò

$$u(\varphi) = -\frac{a^2}{2b^2} + u'(\varphi) = -\frac{a}{2b^2} + \frac{1}{b^2} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \cos \varphi \quad (13)$$

Se $r \rightarrow \infty$ si ha $\varphi \rightarrow \pm\psi$:

$$0 = -\frac{a}{2b^2} + \frac{1}{b^2} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \cos \psi$$

da cui

$$\cos \psi = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}} \quad (14)$$

o anche

$$\tan \psi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \psi}}{\cos \psi} = \frac{2b}{a} \quad ; \quad \psi = \tan^{-1} \frac{2b}{a} \quad (15)$$

L'angolo di deflessione è quindi espresso da (v. fig. 1)

$$\theta = \pi - 2\psi = \pi - 2 \tan^{-1} \frac{2b}{a} \quad (16)$$

Notiamo che, se b è molto grande, l'angolo θ tende a zero, in accordo col fatto che non vi è quasi più deflessione, mentre se b vale zero (impatto "frontale") l'angolo θ tende a π , in accordo col fatto che la particella, raggiunta la distanza a dal centro di forze, viene da questo respinta e se ne allontana ritornando sul suo percorso.

* * *

Nella pratica sperimentale un fascio di particelle aventi carica q e supposte non mutualmente interagenti è diretto verso il bersaglio avente carica q' . La posizione di ogni singola particella in avvicinamento al bersaglio non è conosciuta e perciò ciascun parametro di impatto è ignoto. Ciò che si può definire è la probabilità che particelle attraversanti una corona circolare centrata sull'asse del fascio (in un piano trasversale ad esso) avente raggio b e larghezza db siano deflesse entro un angolo solido $d\Omega$ compreso fra due coni concentrici con vertici in O (cioè nel bersaglio) e aventi rispettivamente apertura θ e $\theta + d\theta$.

Nell'ipotesi che nel fascio le particelle siano uniformemente distribuite, la probabilità, che indichiamo con $d\sigma$, è proporzionale all'area della corona circolare:

$$d\sigma = \pi(b + db)^2 - \pi b^2 = 2\pi b db \quad (17)$$

L'angolo solido $d\Omega$ è definito dal rapporto fra la superficie della zona sferica $d\Sigma$ da esso intercettata (v. fig. 2) e il quadrato del raggio della sfera (con centro in O) che contiene la zona sferica:

$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{r^2} = \frac{r^2 \sin \theta d\theta}{r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \sin \theta d\theta = 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

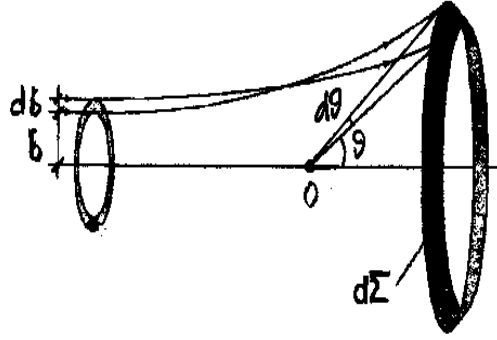


fig. 2

Ma dalla (16) si ricava $b = \frac{a}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$ e infine

$$b = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2} \quad ; \quad db = \frac{db}{d\theta} d\theta = \frac{a}{2} \frac{d \cot \frac{\theta}{2}}{d\theta} d\theta = \frac{a}{2} \left(-\operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{d\frac{\theta}{2}}{d\theta} d\theta = \frac{a}{2} \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{1}{2} d\theta$$

Ricaviamo da questa ultima espressione $d\theta$

$$d\theta = -\frac{db}{\frac{a}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

e sostituiamolo nella espressione di $d\Omega$, che così diventa funzione di db :

$$d\Omega = 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = -4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{db}{\frac{a}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Ricavando db

$$db = -\frac{a}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} d\Omega$$

e sostituendo b e db in $d\sigma$ si ottiene infine

$$d\sigma = 2\pi \cdot b \cdot db = -2\pi \cdot \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2} \cdot \frac{a}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} d\Omega = -\frac{a^2}{16} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega \quad (18)$$

detta *sezione d'urto infinitesima*.

Essa esprime la probabilità di diffusione nell'angolo solido $d\Omega$, centrato nella direzione θ , per flusso incidente unitario.

Le sezioni d'urto si misurano in *barn* (simbolo: b); $1b = 10^{-24} \text{cm}^2$.

Dalla (18), tenendo conto della (10), si ricava la quantità

$$\left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| = \frac{a^2}{16} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{16} \left(\frac{qq'}{\frac{1}{2} m_0 v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (19)$$

detta *sezione d'urto differenziale*.

Essa esprime la probabilità di diffusione nell'angolo solido unitario (centrato in θ) per flusso incidente unitario. Sperimentalmente essa è misurata dal rapporto fra il numero delle particelle diffuse entro l'angolo solido unitario e il numero delle particelle incidenti sul bersaglio per area unitaria.

Questa è la formula che Rutherford usò per analizzare i risultati dei suoi esperimenti sulla struttura dell'atomo ed è perciò detta *formula di Rutherford*.

La sezione d'urto totale è espressa da

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\varphi \quad (20)$$

Essa è misurata dal rapporto fra il numero delle particelle diffuse e il numero delle particelle incidenti sul bersaglio per area unitaria.

B) DIFFUSIONE DI PARTICELLE IN MECCANICA QUANTISTICA

La formula di Rutherford è stata ricavata esclusivamente sulla base di considerazioni di meccanica classica. È quindi lecito chiedersi che valore possa avere in meccanica quantistica, o, di più, che valore possa avere la preferenza accordata, all'inizio del 1900, al modello di atomo di Rutherford sul modello di Thomson, dato che tale preferenza si basa su una verifica sostenuta da una equazione che è "sbagliata" perché è ricavata da considerazioni classiche non applicabili allo studio di un sistema atomico.

La risposta a queste domande verrà data per esteso quando si studierà in ambiente quantistico la diffusione coulombiana, di cui in questa sezione B viene data una presentazione introduttiva.

Per ora possiamo anticipare che la sezione d'urto differenziale per la diffusione coulombiana calcolata in ambiente quantistico è uguale a quella calcolata in ambiente classico.

Conviene sottolineare che l'uguaglianza esiste solo se il potenziale di diffusione è coulombiano, cioè se è proporzionale a $1/r$: in generale, per altri potenziali la formula di Rutherford non è valida in ambiente quantistico.

* * *

Consideriamo un sistema meccanico descritto in Meccanica di Schödinger al tempo t_0 dal vettore $|\chi_A(t_0)\rangle$. Se non è soggetto ad alcuna interazione il sistema, come sappiamo, evolve in accordo con la (728) dello studio (a):

$$|\chi_A(t)\rangle = T_S(t, t_0)|\chi_A(t_0)\rangle$$

In presenza di interazioni è generalmente impossibile determinare a priori quale sarà lo stato del sistema in t . Si può dare solamente una stima probabilistica così definibile: l'ampiezza di probabilità che il sistema si trovi in t in un qualsivoglia stato $|\chi_B(t)\rangle$ è espressa da

$$\langle\chi_B(t)|\chi_A(t)\rangle = \langle\chi_B(t)|T_S(t, t_0)|\chi_A(t_0)\rangle \quad (21)$$

La (21) è detta *ampiezza di probabilità di transizione* dallo stato $|\chi_A(t_0)\rangle$ allo stato $|\chi_B(t)\rangle$. Ora consideriamo, fra i sistemi meccanici costituiti da una particella che interagisce con un potenziale, quelli in cui il potenziale ha una parte dipendente dal tempo che si annulla fuori da un certo intervallo $T_1 \vdash T_2$, perciò per $t_0 < T_1$ o $t > T_2$ il potenziale diventa statico.

L'ampiezza di probabilità di transizione di trovare nello stato finale $|\chi_f\rangle$ al tempo t la particella che in t_0 era nello stato iniziale $|\chi_i\rangle$ è espressa da:

$$A_{fi} = \langle\chi_f(t)|\chi_i(t)\rangle = \langle\chi_f(t)|T_S(t, t_0)|\chi_i(t_0)\rangle \quad (22)$$

Questa ampiezza di probabilità può essere associata a deversi processi come, ad esempio, la diffusione di particelle, in cui $|\chi_i\rangle$ e $|\chi_f\rangle$ sono entrambi stati di diffusione, o la transizione di una particella da uno stato legato a un altro.

Ci interesseremo al processo di diffusione.

Tipicamente si ha una particella che, partendo da uno stato iniziale $|\chi_i\rangle$ in cui non è soggetta a potenziale, passa attraverso una zona nella quale ha luogo un'interazione con un potenziale \mathcal{V} dipendente dal tempo e raggiunge uno stato finale $|\chi_f\rangle$ in cui di nuovo non è soggetta a potenziale. Alla teoria si chiede di determinare quale è la ampiezza di probabilità di trovare nello stato finale $|\chi_f\rangle$ al tempo t la particella che in t_0 era in $|\chi_i\rangle$. Rappresentiamo la (22) nelle coordinate:

$$A_{fi} = \int \langle \chi_f(t) | \overline{\mathcal{R}} \rangle \langle \overline{\mathcal{R}} | T_S(t, t_0) | \overline{\mathcal{R}}' \rangle \langle \overline{\mathcal{R}}' | \chi_i(t_0) \rangle d\overline{\mathcal{R}} d\overline{\mathcal{R}}' \quad (23)$$

La quantità $\langle \overline{\mathcal{R}} | \chi_f(t) \rangle$ è la rappresentazione nelle coordinate del vettore di stato finale, mentre $\langle \overline{\mathcal{R}}' | \chi_i(t_0) \rangle$ è la rappresentazione nelle coordinate del vettore di stato iniziale. Ricordando la relazione di chiusura $\int |\overline{p}\rangle \langle \overline{p}| d\overline{p} = \mathbf{1}$ possiamo scrivere:

$$\langle \overline{\mathcal{R}} | \chi_f(t) \rangle = \int \langle \overline{\mathcal{R}} | \overline{p} \rangle \langle \overline{p} | \chi_f(t) \rangle d\overline{p}$$

Ma $|\chi_f(t)\rangle = |\chi_f(0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_f t}$ essendo \mathcal{H}_f l'hamiltoniana della particella nello stato finale in cui la particella non è soggetta a potenziale e si ha così

$$\langle \overline{\mathcal{R}} | \chi_f(t) \rangle = \int \langle \overline{\mathcal{R}} | \overline{p} \rangle \langle \overline{p} | \chi_f(0) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_f t} d\overline{p}$$

Poniamo inoltre

$$\langle \overline{\mathcal{R}} | \chi_f(t) \rangle = \phi[\overline{\mathcal{R}}, t | f] \quad ; \quad \langle \overline{p} | \chi_f(0) \rangle = f(\overline{p}) \quad (24)$$

cosicché, tenendo conto della (990) dello studio (a) che qui riscriviamo

$$\langle \overline{\mathcal{R}} | \overline{p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\hbar^3}} e^{\frac{i}{\hbar}\overline{p} \cdot \overline{\mathcal{R}}}$$

si ha il pacchetto d'onde con profilo $f(\overline{p})$

$$\phi[\overline{\mathcal{R}}, t | f] = \frac{1}{\sqrt{\hbar^3}} \int f(\overline{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_f t} e^{\frac{i}{\hbar}\overline{p} \cdot \overline{\mathcal{R}}} d\overline{p}$$

e analogamente, avendo posto

$$\langle \overline{\mathcal{R}}' | \chi_i(t_0) \rangle = \phi[\overline{\mathcal{R}}', t_0 | g] \quad ; \quad \langle \overline{p} | \chi_i(0) \rangle = g(\overline{p}) \quad (25)$$

si ha il pacchetto d'onde con profilo $g(\overline{p})$

$$\phi[\overline{\mathcal{R}}', t_0 | g] = \frac{1}{\sqrt{\hbar^3}} \int g(\overline{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_i t_0} e^{\frac{i}{\hbar}\overline{p} \cdot \overline{\mathcal{R}}'} d\overline{p} \quad (26)$$

dove \mathcal{H}_i è l'hamiltoniana della particella nello stato iniziale in cui la particella non è soggetta a potenziale.

La (23) diviene

$$A_{fi} = \int \phi^*[\overline{\mathcal{R}}, t | f] \langle \overline{\mathcal{R}} | T_S(t, t_0) | \overline{\mathcal{R}}' \rangle \phi[\overline{\mathcal{R}}', t_0 | g] d\overline{\mathcal{R}} d\overline{\mathcal{R}}'$$

Tenendo presente la definizione di propagatore (v. l'eq. (33) dello studio (b)) si può scrivere

$$A_{fi} = -i \int \phi^*[\bar{\mathcal{R}}, t|f] \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t; \bar{\mathcal{R}}', t_0] \mathcal{V} \phi[\bar{\mathcal{R}}', t_0|g] d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' \quad (27)$$

La A_{fi} è così l'ampiezza di probabilità che una particella incidente con profilo $g(\bar{p})$, dopo essere stata diffusa dal potenziale $\mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t)$, sia rivelata da una apparecchiatura le cui caratteristiche sono definite dal profilo $f(\bar{p})$.

Se $\mathcal{V} = 0$, cioè se la particella si muove liberamente non essendo soggetta ad alcun potenziale, l'espressione del propagatore diviene $\theta(t - t_0) \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t | \bar{\mathcal{R}}', t_0 | 0]$ ovvero, semplificando la scrittura, $\theta(t - t_0) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}'; t - t_0)$ cosicché

$$A_{fi} = -i \int \phi^*[\bar{\mathcal{R}}, t|f] \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t - t_0) \phi[\bar{\mathcal{R}}', t_0|g] d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' \quad (28)$$

$$= \int \phi^*[\bar{\mathcal{R}}, t|f] \left(-i \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t - t_0) \phi[\bar{\mathcal{R}}', t_0|g] d\bar{\mathcal{R}}' \right) d\bar{\mathcal{R}} \quad (29)$$

$$= \int \phi^*[\bar{\mathcal{R}}, t|f] \phi[\bar{\mathcal{R}}, t|g] d\bar{\mathcal{R}} \quad (30)$$

Nella (29) è stata esplicitata la doppia integrazione non evidenziata nella (28); nella (30) si è tenuto conto della (47) dello studio (b), cioè

$$\phi[\bar{\mathcal{R}}, t|g] = -i \int \underset{*}{\mathcal{K}}(\bar{\mathcal{R}} - \underset{*}{\bar{\mathcal{R}}}', t - t_0) \underset{*}{\phi}[\bar{\mathcal{R}}', t_0|g] d\bar{\mathcal{R}}'$$

Ci proponiamo di ottenere per la A_{fi} un'altra espressione, equivalente alla (27), basandoci su una procedura che ora mostreremo.

Consideriamo il membro destro della (22) come una funzione di t :

$$F(t) = \langle \chi_f(t) | T_S(t, t_0) | \chi_i(t_0) \rangle \quad (31)$$

e osserviamo che vale la seguente ovvia relazione:

$$F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dF(t')}{dt'} dt' \quad (32)$$

Ponendo nella (31) $t = t_0$ si ottiene $F(t_0) = \langle \chi_f(t_0) | T_S(t_0, t_0) | \chi_i(t_0) \rangle$. Poiché $T_S(t_0, t_0) = \mathbf{1}$ segue

$$F(t_0) = \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle$$

Ponendo nella (31) $t = t'$ si ottiene $F(t') = \langle \chi_f(t') | T_S(t', t_0) | \chi_i(t_0) \rangle$ perciò la (32) diviene

$$F(t) = \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle + \int_{t_0}^t \frac{d\langle \chi_f(t') | T_S(t', t_0) \rangle}{dt'} dt' | \chi_i(t_0) \rangle \quad (33)$$

Ora osserviamo che

$$\frac{d\langle \chi_f(t') | T_S(t', t_0) \rangle}{dt'} = \frac{d\langle \chi_f(t') |}{dt'} T_S(t', t_0) + \langle \chi_f(t') | \frac{d}{dt'} T_S(t', t_0)$$

Ma tenendo presente l'equazione di Schrödinger nel bra $\langle \chi_f(t) |$ espressa dall'eq. (738) dello studio (a) che qui riscriviamo

$$\frac{d\langle \chi_f(t') |}{dt'} = \langle \chi_f(t') | \frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f$$

si ottiene

$$\frac{d\langle \chi_f(t') | T_S(t', t_0)}{dt'} = \langle \chi_f(t') | \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f + \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t_0)$$

Segue dalla (33)

$$F(t) = \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle + \int_{t_0}^t \langle \chi_f(t') | \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f + \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t_0) dt' | \chi_i(t_0) \rangle \quad (34)$$

Ripetiamo questo procedimento per la (34) considerata funzione di t_0 :

$$F(t_0) = \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle + \int_{t_0}^t \langle \chi_f(t') | \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f + \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t_0) dt' | \chi_i(t_0) \rangle \quad (35)$$

Partiamo dall'ovvia relazione (v. eq. (32))

$$F(t_0) = F(t) - \int_{t_0}^t \frac{dF(t'')}{dt''} dt'' \quad (36)$$

e osserviamo che, per la (31), si ha $F(t) = \langle \chi_f(t) | \chi_i(t) \rangle = \langle \chi(t_0) | T_S^\dagger(t, t_0) T_S(t, t_0) | \chi_i(t_0) \rangle = \langle \chi(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle$ (v. eq. (6) della Appendice dello studio (b)) cosicché la (36) diviene

$$F(t_0) = \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle - \int_{t_0}^t \frac{dF(t'')}{dt''} dt'' \quad (37)$$

Ma dalla (35) si ottiene

$$F(t'') = \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t''} \langle \chi_f(t') | \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f + \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t'') dt' | \chi_i(t'') \rangle$$

perciò la (37) diviene

$$\begin{aligned} F(t_0) &= \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle - \int_{t_0}^t \frac{d}{dt''} \left\{ \int_{t_0}^{t''} \langle \chi_f(t') | \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f + \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t'') | \chi_i(t'') \rangle dt' \right\} dt'' \\ &= \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t''} \langle \chi_f(t') | \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f + \frac{d}{dt'} \right) \frac{dT_S(t', t'') | \chi_i(t'') \rangle}{dt''} dt' dt'' \\ &= \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t''} \langle \chi_f(t') | \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f + \frac{d}{dt'} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{dT_S(t', t'') | \chi_i(t'') \rangle}{dt''} + T_S(t', t'') \frac{d | \chi_i(t'') \rangle}{dt''} \right) dt' dt'' \\ &= \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t''} \langle \chi_f(t') | \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f + \frac{d}{dt'} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{dT_S(t', t'') | \chi_i(t'') \rangle}{dt''} + T_S(t', t'') \left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_i | \chi_i(t'') \rangle \right) \right) dt' dt'' \\ &= \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t''} \langle \chi_f(t') | \left\{ \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f + \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t'') \left(\frac{d}{dt''} - \frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_i \right) \right\} | \chi_i(t'') \rangle dt' dt'' \end{aligned}$$

Si noti che sia l'operatore a destra di $T_S(t', t'')$ che quello a sinistra agiscono su T_S : è per evidenziare questo fatto che si sono introdotte le parentesi graffe.

Da questo sviluppo segue che la (22), considerata funzione sia di t che di t_0 , può essere scritta così

$$A_{fi} = F(t, t_0) = \langle \chi_f(t) | T_S(t, t_0) | \chi_i(t_0) \rangle = \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle + \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \langle \chi_f(t') | \left\{ \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_f + \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t'') \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_i - \frac{d}{dt''} \right) \right\} | \chi_i(t'') \rangle dt' dt''$$

ovvero

$$A_{fi} = \langle \chi_f(t) | T_S(t, t_0) | \chi_i(t_0) \rangle = \langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle + \\ + \frac{i^2}{\hbar^2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \langle \chi_f(t') | \left\{ \left(\mathcal{H}_f - i\hbar \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t'') \left(\mathcal{H}_i + i\hbar \frac{d}{dt''} \right) \right\} | \chi_i(t'') \rangle dt' dt'' \quad (38)$$

Ciò posto, consideriamo il primo termine a membro destro della (38).

Tenendo presenti le (24) e (25) che riscriviamo così:

$$\langle \overline{\mathcal{R}} | \chi_f(t_0) \rangle = \phi[\overline{\mathcal{R}}, t_0 | f] \equiv \phi[f] \quad ; \quad \langle \overline{\mathcal{R}} | \chi_i(t_0) \rangle = \phi[\overline{\mathcal{R}}, t_0 | g] \equiv \phi[g] \quad (39)$$

otteniamo

$$\langle \chi_f(t_0) | \chi_i(t_0) \rangle = \int \langle \chi_f(t_0) | \overline{\mathcal{R}} \rangle \langle \overline{\mathcal{R}} | \chi_i(t_0) \rangle d\overline{\mathcal{R}} = \int \langle \overline{\mathcal{R}} | \chi_f(t_0) \rangle^* \langle \overline{\mathcal{R}} | \chi_i(t_0) \rangle d\overline{\mathcal{R}} \equiv (\phi[f], \phi[g])$$

Consideriamo ora l'integrando del secondo termine a membro destro della (38). Introducendo la relazione di chiusura delle coordinate $\overline{\mathcal{R}}$ e $\overline{\mathcal{R}}'$ si ottiene:

$$\langle \chi_f(t') | \left\{ \left(\mathcal{H}_f - i\hbar \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t'') \left(\mathcal{H}_i + i\hbar \frac{d}{dt''} \right) \right\} | \chi_i(t'') \rangle = \\ = \iint \langle \chi_f(t') | \overline{\mathcal{R}} \rangle \langle \overline{\mathcal{R}} | \left\{ \left(\mathcal{H}_f - i\hbar \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t'') \left(\mathcal{H}_i + i\hbar \frac{d}{dt''} \right) \right\} | \overline{\mathcal{R}}' \rangle \langle \overline{\mathcal{R}}' | \chi_i(t'') \rangle d\overline{\mathcal{R}} d\overline{\mathcal{R}}'$$

Ma dall' eq. (933) dello studio (a), poiché la particella negli stati iniziale e finale è libera, si ricava

$$\langle \overline{\mathcal{R}} | \mathcal{H}_f = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_{\overline{\mathcal{R}}}^2 \right) \langle \overline{\mathcal{R}} | \quad ; \quad \mathcal{H}_i | \overline{\mathcal{R}}' \rangle = | \overline{\mathcal{R}}' \rangle \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_{\overline{\mathcal{R}}'}^2 \right)$$

e quindi

$$\langle \chi_f(t') | \left\{ \left(\mathcal{H}_f - i\hbar \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t'') \left(\mathcal{H}_i + i\hbar \frac{d}{dt''} \right) \right\} | \chi_i(t'') \rangle = \\ = \iint \langle \overline{\mathcal{R}} | \chi_f(t') \rangle^* \left\{ \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_{\overline{\mathcal{R}}}^2 - i\hbar \frac{d}{dt'} \right) \langle \overline{\mathcal{R}} | T_S(t', t'') | \overline{\mathcal{R}}' \rangle \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_{\overline{\mathcal{R}}'}^2 + i\hbar \frac{d}{dt''} \right) \right\} \langle \overline{\mathcal{R}}' | \chi_i(t'') \rangle d\overline{\mathcal{R}} d\overline{\mathcal{R}}'$$

Se ora introduciamo (v. le eq. (41) dello studio (b))

$$S_{\mathcal{R}} = -i\hbar \frac{d}{dt'} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_{\overline{\mathcal{R}}}^2 \quad ; \quad S_{\mathcal{R}'} = i\hbar \frac{d}{dt''} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla_{\overline{\mathcal{R}}'}^2$$

e ricordiamo la definizione di propagatore espressa dalla (30) dello studio (b) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \langle \chi_f(t') | \left\{ \left(\mathcal{H}_f - i\hbar \frac{d}{dt'} \right) T_S(t', t'') \left(\mathcal{H}_i + i\hbar \frac{d}{dt''} \right) \right\} | \chi_i(t'') \rangle = \\ = -i \iint \langle \bar{\mathcal{R}} | \chi_f(t') \rangle^* \left\{ S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t'; \bar{\mathcal{R}}', t'' | \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t')] S_{\mathcal{R}'} \right\} \langle \bar{\mathcal{R}}' | \chi_i(t'') \rangle d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' \end{aligned}$$

La (38) diviene così:

$$\begin{aligned} A_{fi} = \langle \chi_f(t) | T_S(t, t_0) | \chi_i(t_0) \rangle = (\phi[f], \phi[g]) + \\ - i \frac{i^2}{\hbar^2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \iint \langle \bar{\mathcal{R}} | \chi_f(t') \rangle^* \left\{ S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t'; \bar{\mathcal{R}}', t'' | \mathcal{V}] S_{\mathcal{R}'} \right\} \langle \bar{\mathcal{R}}' | \chi_i(t'') \rangle d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' dt' dt'' \quad (40) \end{aligned}$$

Ora consideriamo nell'integrando a membro destro della (40) la parte contenuta entro parentesi graffe e inseriamo in essa lo sviluppo (52) dello studio (b) che qui riportiamo adattando opportunamente i simboli:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t'; \bar{\mathcal{R}}', t'' | \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t')] = \\ = \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t' - t'') - \frac{1}{\hbar} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t' - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}', t_1 - t'') d\bar{\mathcal{R}}_1 dt_1 + \\ + \frac{1}{\hbar^2} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t' - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}_2, t_1 - t_2) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_2, t_2) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_2 - \bar{\mathcal{R}}', t_2 - t'') \cdot \\ \cdot d\bar{\mathcal{R}}_1 d\bar{\mathcal{R}}_2 dt_1 dt_2 - \frac{1}{\hbar^3} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t' - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}_2, t_1 - t_2) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_2, t_2) \cdot \\ \cdot \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_2 - \bar{\mathcal{R}}_3, t_2 - t_3) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_3, t_3) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_3 - \bar{\mathcal{R}}', t_3 - t'') d\bar{\mathcal{R}}_1 d\bar{\mathcal{R}}_2 d\bar{\mathcal{R}}_3 dt_1 dt_2 dt_3 + \dots \end{aligned}$$

Effettuando l'inserimento si ottiene

$$\begin{aligned} \left\{ S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t'; \bar{\mathcal{R}}', t'' | \mathcal{V}] S_{\mathcal{R}'} \right\} = \left\{ S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t' - t'') S_{\mathcal{R}'} \right\} + \\ - \frac{1}{\hbar} \left\{ S_{\mathcal{R}} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t' - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}', t_1 - t'') d\bar{\mathcal{R}}_1 dt_1 S_{\mathcal{R}'} \right\} + \\ + \frac{1}{\hbar^2} \left\{ S_{\mathcal{R}} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t' - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}_2, t_1 - t_2) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_2, t_2) \cdot \right. \\ \left. \cdot \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_2 - \bar{\mathcal{R}}', t_2 - t'') d\bar{\mathcal{R}}_1 d\bar{\mathcal{R}}_2 dt_1 dt_2 S_{\mathcal{R}'} \right\} + \dots \quad (41) \end{aligned}$$

Esaminiamo le quantità che compaiono fra parentesi graffe a membro destro.

Tenendo presente l'eq. (48) dello studio (b) che qui riportiamo

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t - t_0) &= \hbar \delta(t - t_0) \delta(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}') \\ \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t - t_0) S_{\mathcal{R}'} &= \hbar \delta(t - t_0) \delta(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}') \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$\bullet \left\{ S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t' - t'') S_{\mathcal{R}'} \right\} = \hbar S_{\mathcal{R}} \delta(t' - t'') \delta(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}') \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet \left\{ S_{\mathcal{R}} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t' - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}', t_1 - t'') d\bar{\mathcal{R}}_1 dt_1 S_{\mathcal{R}'} \right\} = \\
 & = \int \left\{ S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t' - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}', t_1 - t'') S_{\mathcal{R}'} \right\} d\bar{\mathcal{R}}_1 dt_1 \\
 & = \hbar \int S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t' - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \delta(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}') \delta(t_1 - t'') d\bar{\mathcal{R}}_1 dt_1 \\
 & = \hbar S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t' - t'') \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}', t'') \\
 & = \hbar^2 \delta(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}') \delta(t' - t'') \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}', t'') \tag{43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet \left\{ S_{\mathcal{R}} \int \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t' - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}_2, t_1 - t_2) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_2, t_2) \right. \\
 & \quad \left. \cdot \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_2 - \bar{\mathcal{R}}', t_2 - t'') d\bar{\mathcal{R}}_1 d\bar{\mathcal{R}}_2 dt_1 dt_2 S_{\mathcal{R}'} \right\} = \\
 & = \int \left\{ S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1, t' - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}_2, t_1 - t_2) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_2, t_2) \right. \\
 & \quad \left. \cdot \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_2 - \bar{\mathcal{R}}', t_2 - t'') S_{\mathcal{R}'} \right\} d\bar{\mathcal{R}}_1 d\bar{\mathcal{R}}_2 dt_1 dt_2 \\
 & = \hbar \int \delta(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}_1) \delta(t' - t_1) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_1, t_1) \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}}_1 - \bar{\mathcal{R}}_2, t_1 - t_2) \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}_2, t_2) \cdot \\
 & \quad \cdot \hbar \delta(\bar{\mathcal{R}}_2 - \bar{\mathcal{R}}') \delta(t_2 - t'') d\bar{\mathcal{R}}_1 d\bar{\mathcal{R}}_2 dt_1 dt_2 \\
 & = \hbar^2 \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t') \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t' - t'') \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}', t'') \tag{44}
 \end{aligned}$$

Inseriamo le (42), (43) e (44) nella (41):

$$\begin{aligned}
 \left\{ S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t'; \bar{\mathcal{R}}', t'' | \mathcal{V}] S_{\mathcal{R}'} \right\} & = \hbar S_{\mathcal{R}} \delta(t' - t'') \delta(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}') - \hbar \delta(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}') \delta(t' - t'') \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}', t'') + \\
 & + \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t') \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t' - t'') \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}', t'') + \dots
 \end{aligned}$$

e quest'ultima nella (40) esplicitando tutti i simboli di integrazione:

$$\begin{aligned}
 A_{fi} & = \langle \chi_f(t) | T_S(t, t_0) | \chi_i(t_0) \rangle = (\phi[f], \phi[g]) + \\
 & + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \iint \phi^*[\bar{\mathcal{R}}, t' | f] S_{\mathcal{R}} \phi[\bar{\mathcal{R}}', t'' | g] \delta(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}') \delta(t' - t'') d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' dt' dt'' + \\
 & - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \iint \phi^*[\bar{\mathcal{R}}, t' | f] \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t'') \phi[\bar{\mathcal{R}}', t'' | g] \delta(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}') \delta(t' - t'') d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' dt' dt'' + \\
 & + \frac{i}{\hbar^2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \iint \phi^*[\bar{\mathcal{R}}, t' | f] \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t') \mathcal{K}(\bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{R}}', t' - t'') \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}', t'') \phi[\bar{\mathcal{R}}', t'' | g] d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' dt' dt'' + \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Consideriamo il secondo termine a membro destro ed eseguiamo l'integrazione rispetto a $\bar{\mathcal{R}}'$ e t'' . Si ottiene:

$$\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \int \phi^*[\bar{\mathcal{R}}, t' | f] S_{\mathcal{R}} \phi[\bar{\mathcal{R}}, t' | g] d\bar{\mathcal{R}} dt' \tag{45}$$

che è nullo in accordo con la prima delle (49) dello studio (b).

Il terzo termine, eseguita l'integrazione rispetto a $\overline{\mathcal{R}}$ e t'' , vale:

$$-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \int \phi^*[\overline{\mathcal{R}}, t'|f] \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}, t') \phi[\overline{\mathcal{R}}, t'|g] d\overline{\mathcal{R}} dt' \quad (46)$$

Il quarto termine rimane invariato, cosicché in definitiva, introducendo per semplicità un solo simbolo di integrale per indicare integrazioni multiple, omettendo apici ormai inutili e introducendo altri indici per maggior chiarezza, si ottiene l'espressione di A_{fi} (equivalente alla (27)) che ci eravamo proposti di determinare:

$$\begin{aligned} A_{fi} = & (\phi[f], \phi[g]) + \\ & - \frac{i}{\hbar} \int \phi^*[\overline{\mathcal{R}}, t_1|f] \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}, t_1) \phi[\overline{\mathcal{R}}, t_1|g] d\overline{\mathcal{R}} dt_1 + \\ & + \frac{i}{\hbar^2} \int \phi^*[\overline{\mathcal{R}}, t_1|f] \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}, t_1) \mathcal{K}(\overline{\mathcal{R}} - \overline{\mathcal{R}}', t_1 - t_2) \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}', t_2) \phi[\overline{\mathcal{R}}', t_2|g] d\overline{\mathcal{R}} d\overline{\mathcal{R}}' dt_1 dt_2 + \\ & - \frac{i}{\hbar^3} \int \phi^*[\overline{\mathcal{R}}, t_1|f] \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}, t_1) \mathcal{K}(\overline{\mathcal{R}} - \overline{\mathcal{R}}', t_1 - t_2) \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}', t_2) \mathcal{K}(\overline{\mathcal{R}}' - \overline{\mathcal{R}}'', t_2 - t_3) \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}'', t_3) \cdot \\ & \cdot \phi[\overline{\mathcal{R}}'', t_3|g] d\overline{\mathcal{R}} d\overline{\mathcal{R}}' d\overline{\mathcal{R}}'' dt_1 dt_2 dt_3 + \\ & + \frac{i}{\hbar^4} \int \phi^*[\overline{\mathcal{R}}, t_1|f] \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}, t_1) \mathcal{K}(\overline{\mathcal{R}} - \overline{\mathcal{R}}', t_1 - t_2) \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}', t_2) \mathcal{K}(\overline{\mathcal{R}}' - \overline{\mathcal{R}}'', t_2 - t_3) \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}'', t_3) \cdot \\ & \cdot \mathcal{K}(\overline{\mathcal{R}}'' - \overline{\mathcal{R}}''', t_3 - t_4) \mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}''', t_4) \phi[\overline{\mathcal{R}}''', t_4|g] d\overline{\mathcal{R}} d\overline{\mathcal{R}}' d\overline{\mathcal{R}}'' d\overline{\mathcal{R}}''' dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 + \dots \quad (47) \end{aligned}$$

ovvero (v. fig. 3)

$$A_{fi} = A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} + A^{(4)} + \dots \quad ; \quad t_1 > t_2 > t_3 > t_4 > \dots$$

In questa equazione il termine $A^{(0)}$ esprime l'ampiezza di probabilità che la particella descritta da $\phi[g]$ subisca una transizione senza interagire col potenziale \mathcal{V} e venga rivelata da una apparecchiatura descritta da $\phi[f]$; notiamo che, in conseguenza delle (39), $A^{(0)}$ risulta essere uguale al membro destro della (30), come ci aspettiamo che debba essere.

Il termine $A^{(1)}$ esprime l'ampiezza di probabilità che la particella descritta da $\phi[g]$ interagisca col potenziale $\mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}, t_1)$ e venga rivelata da $\phi[f]$; in particolare si può pensare che l'interazione avvenga in $\overline{\mathcal{R}}$ al tempo t_1 e che dopo l'interazione la particella sia rivelata da una apparecchiatura le cui caratteristiche sono descritte da $\phi[f]$.

Il termine $A^{(2)}$ esprime l'ampiezza di probabilità di una duplice interazione col potenziale; in particolare si può pensare che la particella interagisca dapprima in $\overline{\mathcal{R}}'$ al tempo t_2 e poi in $\overline{\mathcal{R}}$ al tempo t_1 : nell'intervallo di tempo compreso fra questi due eventi la particella si muove liberamente ed è descritta dal propagatore $\mathcal{K}(\overline{\mathcal{R}} - \overline{\mathcal{R}}', t_1 - t_2)$.

Il termine $A^{(3)}$ esprime l'ampiezza di probabilità di una triplice interazione col potenziale; in particolare si può pensare che la particella interagisca dapprima in $\overline{\mathcal{R}}''$ al tempo t_3 , poi in $\overline{\mathcal{R}}'$ al tempo t_2 e infine in $\overline{\mathcal{R}}$ al tempo t_1 ; nell'intervallo di tempo compreso fra t_2 e t_3 la particella si muove liberamente ed è descritta dal propagatore $\mathcal{K}(\overline{\mathcal{R}}' - \overline{\mathcal{R}}'', t_2 - t_3)$; nell'intervallo fra t_1 e t_2 la particella si muove liberamente ed è descritta dal propagatore $\mathcal{K}(\overline{\mathcal{R}} - \overline{\mathcal{R}}', t_1 - t_2)$.

Discorsi simili possono essere ripetuti per i termini successivi dello sviluppo (47).

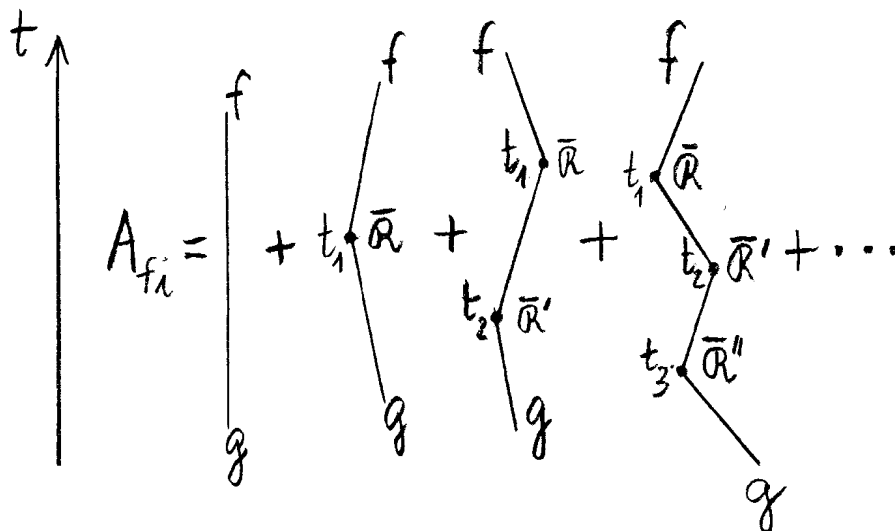


fig. 3

La precisione nella determinazione di A_{fi} è tanto maggiore quanti più termini $A^{(n)}$ si prendono in considerazione. Talvolta ne bastano pochi per avere una buona approssimazione. Se si considerano solo i primi due termini, cioè $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$, si dice che l'ampiezza di probabilità è calcolata nella *approssimazione di Born*:

$$A_{fi}^B = (\phi[f], \phi[g]) - \frac{i}{\hbar} \int \phi^*[\bar{\mathcal{R}}, t|f] \mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t) \phi[\bar{\mathcal{R}}, t|g] d\bar{\mathcal{R}} dt \quad (48)$$

C) OPERATORE DI DIFFUSIONE

Quanto è stato detto finora sull'ampiezza di probabilità di transizione A_{fi} verrà ora ripreso nella descrizione di interazione (v. Appendice E). Ciò implica che l'hamiltoniana del sistema fisico in studio deve poter essere separata in due parti che nell'Appendice E sono state indicate con \mathcal{H}_{S_0} e $\mathcal{H}_{S_{int}}$ (v. eq. (E19)). Assumiamo che la parte \mathcal{H}_{S_0} dell'hamiltoniana, in accordo con l'ipotesi fatta più sopra sul potenziale, non dipenda esplicitamente dal tempo, cosicché tenendo conto della (E28) si può scrivere la corrispondente della (22) nel modo seguente:

$$\langle \chi_f(t) | V(t, t') \chi_i(t') \rangle = \langle \chi_f(t) | e^{\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S_0}} T_S(t, t') e^{-\frac{i}{\hbar} t' \mathcal{H}_{S_0}} \chi_i(t') \rangle \quad (49)$$

dove $|\chi_f(t)\rangle$ e $|\chi_i(t')\rangle$ sono i vettori di stato della particella nella descrizione di interazione. Rappresentiamo T_S nelle coordinate e teniamo conto della definizione di propagatore espressa dalla (30) dello studio (b):

$$\begin{aligned} \langle \chi_f | V \chi_i \rangle &= \langle \chi_f | e^{\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S_0}} T_S(t, t') e^{-\frac{i}{\hbar} t' \mathcal{H}_{S_0}} | \chi_i \rangle \\ &= \int \langle \chi_f | e^{\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S_0}} | \bar{\mathcal{R}} \rangle \langle \bar{\mathcal{R}} | T_S(t, t') | \bar{\mathcal{R}}' \rangle \langle \bar{\mathcal{R}}' | e^{-\frac{i}{\hbar} t' \mathcal{H}_{S_0}} | \chi_i \rangle d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' \\ &= -i \int \langle \chi_f | e^{\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S_0}} | \bar{\mathcal{R}} \rangle \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t; \bar{\mathcal{R}}', t'] \mathcal{V}[\bar{\mathcal{R}}', t'] \langle \bar{\mathcal{R}}' | e^{-\frac{i}{\hbar} t' \mathcal{H}_{S_0}} | \chi_i \rangle d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' \end{aligned}$$

Passando al limite per $t \rightarrow +\infty$ e $t' \rightarrow -\infty$ si ottiene la definizione dell'operatore di diffusione (scattering) S :

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} V(t, t') \quad (50)$$

cosicché

$$\langle \chi_f(+\infty) | S \chi_i(-\infty) \rangle = A_{fi} \quad (51)$$

L'operatore di diffusione è utilizzato nello studio della probabilità di transizione di una particella che, provenendo da una condizione di libertà (non assoggettamento a potenziale) in cui si trovava in $t' \rightarrow -\infty$, si avvicina ad una porzione di spazio in cui interagisce con un potenziale e dalla quale poi si allontana ritornando in condizioni di libertà per $t \rightarrow +\infty$. In questi casi l'esistenza del limite che compare nella (50) è assicurata dal fatto che il potenziale tende ad annullarsi al di fuori della porzione di spazio in cui avviene l'interazione. Rappresentiamo S nei momenti \bar{p} e \bar{q} (usiamo i simboli \bar{p} e \bar{q} in luogo di \bar{p}' e \bar{p}'' per semplicità di scrittura):

$$\begin{aligned} & \int \langle \chi_f | \bar{p} \rangle \langle \bar{p} | S | \bar{q} \rangle \langle \bar{q} | \chi_i \rangle d\bar{p} d\bar{q} = \\ & = -i \int \langle \chi_f | \bar{p} \rangle \langle \bar{p} | e^{\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S_0}} | \bar{\mathcal{R}} \rangle \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t; \bar{\mathcal{R}}', t' | \mathcal{V}] \langle \bar{\mathcal{R}}' | e^{-\frac{i}{\hbar} t' \mathcal{H}_{S_0}} | \bar{q} \rangle \langle \bar{q} | \chi_i \rangle d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' d\bar{p} d\bar{q} \end{aligned}$$

Ma (v. eq. (990) dello studio (a)) si ha: $\langle \bar{p} | \bar{\mathcal{R}} \rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{p} \cdot \bar{\mathcal{R}}}}{\sqrt{h^3}}$ e $\langle \bar{\mathcal{R}}' | \bar{q} \rangle = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \bar{q} \cdot \bar{\mathcal{R}}'}}{\sqrt{h^3}}$ cosicché

$$\begin{aligned} \langle \bar{p} | e^{\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S_0}} | \bar{\mathcal{R}} \rangle &= \langle \bar{p} | e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\bar{p}^2}{2m_0} t} | \bar{\mathcal{R}} \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\bar{p}^2}{2m_0} t} \langle \bar{p} | \bar{\mathcal{R}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{h^3}} e^{\frac{i}{\hbar} (\frac{\bar{p}^2}{2m_0} t - \bar{p} \cdot \bar{\mathcal{R}})} \\ \langle \bar{\mathcal{R}}' | e^{-\frac{i}{\hbar} t' \mathcal{H}_{S_0}} | \bar{q} \rangle &= \langle \bar{\mathcal{R}}' | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\bar{q}^2}{2m_0} t'} | \bar{q} \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\bar{q}^2}{2m_0} t'} \langle \bar{\mathcal{R}}' | \bar{q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{h^3}} e^{-\frac{i}{\hbar} (\frac{\bar{q}^2}{2m_0} t' - \bar{q} \cdot \bar{\mathcal{R}}')} \end{aligned} \quad (52)$$

perciò si ha:

$$\begin{aligned} & \int f^*(\bar{p}) \langle \bar{p} | S | \bar{q} \rangle g(\bar{q}) d\bar{p} d\bar{q} = \\ & = -\frac{i}{h^3} \int f^*(\bar{p}) e^{\frac{i}{\hbar} (\frac{\bar{p}^2}{2m_0} t - \bar{p} \cdot \bar{\mathcal{R}})} \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t; \bar{\mathcal{R}}', t' | \mathcal{V}] e^{-\frac{i}{\hbar} (\frac{\bar{q}^2}{2m_0} t' - \bar{q} \cdot \bar{\mathcal{R}}')} g(\bar{q}) d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' d\bar{p} d\bar{q} \end{aligned} \quad (53)$$

da cui la *matrice di diffusione nella rappresentazione dei momenti*

$$\langle \bar{p} | S | \bar{q} \rangle = S(\bar{p}, \bar{q}) = -\frac{i}{h^3} \int e^{\frac{i}{\hbar} (\frac{\bar{p}^2}{2m_0} t - \bar{p} \cdot \bar{\mathcal{R}})} \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t; \bar{\mathcal{R}}', t' | \mathcal{V}] e^{-\frac{i}{\hbar} (\frac{\bar{q}^2}{2m_0} t' - \bar{q} \cdot \bar{\mathcal{R}}')} d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' \quad (54)$$

Se si desidera ottenere una espressione del tipo (40) occorre applicare alla (49) la procedura che ha generato la (40) e che ora fornisce

$$\begin{aligned} & \langle \chi_f | S \chi_i \rangle = \\ & = \langle \chi_f | \mathbb{1} | \chi_i \rangle + i \int \langle \chi_f | e^{\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S_0}} | \bar{\mathcal{R}} \rangle (S_R \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t; \bar{\mathcal{R}}', t' | \mathcal{V}] S_{R'}) \langle \bar{\mathcal{R}}' | e^{-\frac{i}{\hbar} t' \mathcal{H}_{S_0}} | \chi_i \rangle d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' dt dt' \end{aligned} \quad (55)$$

Rappresentiamo S nei momenti \bar{p} e \bar{q} :

$$\int \langle \chi_f | \bar{p} \rangle \langle \bar{p} | S | \bar{q} \rangle \langle \bar{q} | \chi_i \rangle d\bar{p} d\bar{q} = \int \langle \chi_f | \bar{p} \rangle \langle \bar{p} | \mathbf{1} | \bar{q} \rangle \langle \bar{q} | \chi_i \rangle d\bar{p} d\bar{q} +$$

$$+ i \int \langle \chi_f | \bar{p} \rangle \langle \bar{p} | e^{\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S_0}} | \bar{\mathcal{R}} \rangle (S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t; \bar{\mathcal{R}}', t' | \mathcal{V}] S_{\mathcal{R}'}) \langle \bar{\mathcal{R}}' | e^{-\frac{i}{\hbar} t' \mathcal{H}_{S_0}} | \bar{q} \rangle \langle \bar{q} | \chi_i \rangle d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' dt dt' d\bar{p} d\bar{q}$$

Tenendo presenti le (52) ed estraendo $\langle \bar{p} | S | \bar{q} \rangle = S(\bar{p}, \bar{q})$ si ottiene infine

$$S(\bar{p}, \bar{q}) =$$

$$= (2\pi)^3 \delta(\bar{p} - \bar{q}) + \frac{i}{\hbar^3} \int e^{\frac{i}{\hbar} (\frac{\bar{p}^2}{2m_0} t - \bar{p} \cdot \bar{\mathcal{R}})} (S_{\mathcal{R}} \mathcal{K}[\bar{\mathcal{R}}, t; \bar{\mathcal{R}}', t' | \mathcal{V}] S_{\mathcal{R}'}) e^{-\frac{i}{\hbar} (\frac{\bar{q}^2}{2m_0} t' - \bar{q} \cdot \bar{\mathcal{R}}')} d\bar{\mathcal{R}} d\bar{\mathcal{R}}' dt dt' \quad (56)$$

Il primo termine a membro destro corrisponde alla ampiezza di probabilità che la particella effettui una transizione senza interagire col potenziale \mathcal{V} ; il secondo è detto “ ampiezza di probabilità propria” e corrisponde all’ampiezza di probabilità che la particella effettui una transizione per effetto di una interazione col potenziale \mathcal{V} .

È anche possibile ottenere una espressione del tipo (47):

$$S(\bar{p}, \bar{q}) = (2\pi)^3 \delta(\bar{p} - \bar{q}) - \frac{i}{\hbar} \tilde{\mathcal{V}}\left(\bar{p} - \bar{q}, \frac{\bar{p}^2}{2m_0} - \frac{\bar{q}^2}{2m_0}\right) +$$

$$+ \frac{i}{\hbar^2} \int \tilde{\mathcal{V}}\left(\bar{p} - \bar{k}, \frac{\bar{p}^2}{2m_0} - \omega\right) \tilde{\mathcal{K}}(\bar{k}, \omega) \tilde{\mathcal{V}}\left(\bar{k} - \bar{q}, \omega - \frac{\bar{q}^2}{2m_0}\right) \frac{d\bar{k} d\omega}{(2\pi)^4} + \dots \quad (57)$$

dove $\tilde{\mathcal{V}}(\bar{k}, \omega)$ è la trasformata di Fourier di $\mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}}, t)$.

I termini che compaiono nello sviluppo della S sono interpretabili così come già si è visto commentando la (47).

Gli argomenti della trasformata di \mathcal{V} rappresentano l’energia e il momento trasferibili alla particella da un campo esterno durante una singola interazione.

APPENDICI

Appendice A

LEGGI DI CONSERVAZIONE IN MECCANICA NEWTONIANA

È detta *legge di conservazione* una legge fisica esprime il fatto che in alcuni sistemi fisici vi sono grandezze che rimangono invariate nel tempo.

Ricordiamo, ad esempio, le leggi di conservazione della massa e della carica elettrica.

Un aspetto notevole delle leggi di conservazione sta nel fatto che esse non sono dipendenti da caratteristiche particolari di un sistema, come posizioni, traiettorie, ecc., e quindi sono riferibili a “classi” di sistemi, come vedremo.

Questa mancanza di dettaglio potrebbe indurre a credere che siano leggi di scarsa utilità, ma è vero il contrario: esse hanno assunto nel corso della storia della fisica importanza crescente fino a diventare di interesse primario, ed è per questo che in questa trattazione verranno riprese più volte con lo scopo di allargare e approfondire il loro significato.

Per ora ci limitiamo a preannunciare che le leggi di conservazione, che in questo capitolo introduciamo come “corollari” della legge fondamentale della meccanica newtoniana, potranno essere ricavate da considerazioni sui concetti di “azione” di un sistema fisico e di trasformazioni di simmetria dello spazio fisico.

A) LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

La legge fondamentale della Meccanica newtoniana per una particella avente massa m_0 e velocità \bar{U} e soggetta a una forza $\bar{\mathcal{F}}$ è espressa da $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \bar{\mathcal{F}}$, essendo $\mathbf{v} = m_0\bar{U}$. In assenza di forze la legge diviene

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad ; \quad \mathbf{v} = m_0\bar{U} \quad (\text{A1})$$

Ciò significa che la quantità di moto (o momento lineare) \mathbf{v} di una particella si conserva se essa non è soggetta a forze, ovvero, come talvolta si usa dire, se essa è *libera*.

B) LEGGE DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO

La legge fondamentale della Meccanica newtoniana per una particella espressa in funzione del momento della forza agente $\bar{\mathcal{N}} = \bar{\mathcal{R}} \times \bar{\mathcal{F}}$ e del momento della quantità di moto $\bar{\mathcal{J}} = \bar{\mathcal{R}} \times \mathbf{v}$ diviene:

$$\frac{d\bar{\mathcal{J}}}{dt} = 0 \quad (\text{A2})$$

Ciò significa che il momento della quantità di moto $\bar{\mathcal{J}}$ di una particella si conserva se è nullo il momento $\bar{\mathcal{N}}$ della forza agente sulla particella.

È interessante notare che il momento $\bar{\mathcal{N}}$ può essere nullo senza che sia nulla la forza. Ricordiamo infatti la definizione di $\bar{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathcal{N}} = \bar{\mathcal{R}} \times \bar{\mathcal{F}}$$

Si vede che, per avere $\bar{\mathcal{N}} = 0$, non è necessario che sia $\bar{\mathcal{F}} = 0$, ma basta che $\bar{\mathcal{F}}$ abbia direzione uguale a quella di $\bar{\mathcal{R}}$, cosicché il prodotto vettoriale si annulla. In questo caso

il momento della quantità di moto della particella si conserva anche se essa è soggetta a forze.

Per esemplificare consideriamo il caso di una particella soggetta esclusivamente a un campo di forze *centrali*, cioè aventi direzione passante per il punto O (detto *centro*) da cui è spiccato $\overline{\mathcal{R}}$, e quindi sempre parallele a $\overline{\mathcal{R}}$ (v. fig. 1).

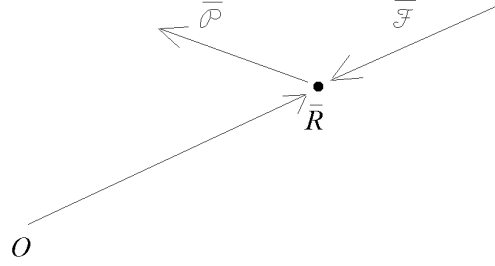


fig. 1

Per quanto si è detto concludiamo che il momento della quantità di moto della particella (che nel caso di moti lungo un'orbita chiusa è detto usualmente momento angolare) si conserva, cioè

$$\overline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{R}} \times \mathbf{v} = \overline{\mathcal{R}} \times (m_0 \overline{\omega} \times \overline{\mathcal{R}}) \quad (\text{A3})$$

rimane costante in modulo e direzione.

Da ciò segue che $\overline{\mathcal{R}}$ è costantemente perpendicolare alla direzione fissa di $\overline{\mathcal{J}}$, quindi $\overline{\mathcal{R}}$ giace sempre su un piano perpendicolare a $\overline{\mathcal{J}}$, mentre $\overline{\omega}$ ha direzione sempre coincidente con $\overline{\mathcal{J}}$, e quindi perpendicolare a $\overline{\mathcal{R}}$. Quindi *il moto di una particella soggetta a forze centrali avviene su un piano avente giacitura fissa*.

Se le forze centrali sono del tipo cosiddetto "coulombiano", cioè se sono derivabili da un potenziale del tipo

$$\mathcal{V}(\overline{\mathcal{R}}) = \frac{k}{\overline{\mathcal{R}}} \quad (\text{A4})$$

con k reale qualsivoglia, può essere messa in evidenza un'altra caratteristica notevole: il *vettore di Laplace-Runge-Lenz* definito da

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{V} \overline{\mathcal{R}} + \overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{J}} \quad (\text{A5})$$

dove $\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}}(t)$ e $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\mathcal{U}}(t)$ sono la posizione e la velocità della particella e $\overline{\mathcal{J}}$ è il suo momento angolare (costante), si conserva.

Infatti si ha:

$$\frac{d\overline{\mathcal{A}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathcal{V} \overline{\mathcal{R}}) + \frac{d}{dt}(\overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{J}}) = \frac{d}{dt}(\mathcal{V} \overline{\mathcal{R}}) + \frac{d\overline{\mathcal{U}}}{dt} \times \overline{\mathcal{J}}$$

Per definizione di derivata materiale si può scrivere

$$\frac{d\overline{\mathcal{A}}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{V} \overline{\mathcal{R}}}{\partial t} + ((\mathcal{V} \overline{\mathcal{R}}) \nabla) \cdot \overline{\mathcal{U}} + \frac{d\overline{\mathcal{U}}}{dt} \times \overline{\mathcal{J}} = \mathcal{V} \frac{\partial \overline{\mathcal{R}}}{\partial t} + \overline{\mathcal{R}} (\mathcal{V} \nabla) \cdot \overline{\mathcal{U}} + \frac{d\overline{\mathcal{U}}}{dt} \times \overline{\mathcal{J}}$$

Poiché $\overline{\mathcal{R}}$ dipende solo da t si ha $\frac{\partial \overline{\mathcal{R}}}{\partial t} = \overline{\mathcal{U}}$ perciò

$$\frac{d\overline{\mathcal{A}}}{dt} = \mathcal{V} \overline{\mathcal{U}} + \overline{\mathcal{R}} (\nabla \mathcal{V}) \cdot \overline{\mathcal{U}} + \frac{d\overline{\mathcal{U}}}{dt} \times \overline{\mathcal{J}}$$

Tenendo presente la (A3) si può scrivere:

$$\frac{d\bar{\mathcal{A}}}{dt} = \mathcal{V}\bar{\mathcal{U}} + \bar{\mathcal{R}}(\nabla\mathcal{V}) \cdot \bar{\mathcal{U}} + \frac{d\bar{\mathcal{U}}}{dt} \times (\bar{\mathcal{R}} \times m_0\bar{\mathcal{U}}) = \mathcal{V}\bar{\mathcal{U}} + \bar{\mathcal{R}}(\nabla\mathcal{V}) \cdot \bar{\mathcal{U}} + \frac{dm_0\bar{\mathcal{U}}}{dt} \times (\bar{\mathcal{R}} \times \bar{\mathcal{U}})$$

Ricordando la relazione fondamentale $\frac{dm_0\bar{\mathcal{U}}}{dt} = -\nabla\mathcal{V}$ si ha ancora

$$\frac{d\bar{\mathcal{A}}}{dt} = \mathcal{V}\bar{\mathcal{U}} + \bar{\mathcal{R}}(\nabla\mathcal{V}) \cdot \bar{\mathcal{U}} - (\nabla\mathcal{V}) \times (\bar{\mathcal{R}} \times \bar{\mathcal{U}})$$

Se ora teniamo presente la $\bar{\mathcal{A}} \times (\bar{\mathcal{B}} \times \bar{\mathcal{C}}) = \bar{\mathcal{A}} \cdot \bar{\mathcal{C}}\bar{\mathcal{B}} - \bar{\mathcal{A}} \cdot \bar{\mathcal{B}}\bar{\mathcal{C}}$ possiamo scrivere:

$$\frac{d\bar{\mathcal{A}}}{dt} = \mathcal{V}\bar{\mathcal{U}} + \bar{\mathcal{R}}(\nabla\mathcal{V}) \cdot \bar{\mathcal{U}} - \nabla\mathcal{V} \cdot \bar{\mathcal{U}}\bar{\mathcal{R}} + \nabla\mathcal{V} \cdot \bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{V}\bar{\mathcal{U}} + \nabla\mathcal{V} \cdot \bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{U}}$$

Infine, inserendo in quest'ultima le espressioni di \mathcal{V} e $\nabla\mathcal{V}$, si ottiene

$$\frac{d\bar{\mathcal{A}}}{dt} = \frac{k}{\bar{\mathcal{R}}}\bar{\mathcal{U}} + \nabla \frac{k}{\bar{\mathcal{R}}} \cdot \bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{U}} = \frac{k}{\bar{\mathcal{R}}}\bar{\mathcal{U}} - \frac{k}{\bar{\mathcal{R}}^2} \frac{\bar{\mathcal{R}}}{\bar{\mathcal{R}}} \cdot \bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{U}} = \frac{k}{\bar{\mathcal{R}}}\bar{\mathcal{U}} - \frac{k\bar{\mathcal{R}}^2}{\bar{\mathcal{R}}^3}\bar{\mathcal{U}} = 0 \quad (\text{A6})$$

e quindi $\bar{\mathcal{A}}$ si conserva.

Convien sottolineare che questa legge di conservazione vale solo se il campo di forze centrali è coulombiano. In ogni altro campo essa non è più verificata.

Questo esempio merita di essere esaminato con particolare interesse non solo perché le forze centrali hanno in fisica grande importanza, ma anche perché mette in evidenza la qualità delle considerazioni che si possono sviluppare e i risultati che si possono ottenere utilizzando le leggi di conservazione.

Molto spesso le indicazioni che da queste si possono ricavare, anche se non sono ricche di dettagli, sono sufficienti ad avviare la soluzione di un problema (ad esempio consentono di eliminare soluzioni fisicamente impossibili), o quanto meno, possono fornire un'immagine generale del fenomeno in studio tale da semplificarne la trattazione matematica.

C) LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA TOTALE

Riprendiamo il Teorema delle forze vive (la variazione di energia cinetica di una particella è dovuta al lavoro effettuato dalle forze che agiscono sulla particella) espresso dalla:

$$dT = d\mathcal{W} \quad (\text{A7})$$

dove \mathcal{T} è l'energia cinetica di una particella e \mathcal{W} è il lavoro effettuato da forze agenti sulla particella. Se le forze agenti sulla particella derivano da un potenziale $\mathcal{V}(\bar{\mathcal{R}})$ non dipendente dal tempo si può scrivere

$$dT = -\nabla\mathcal{V} \cdot d\bar{\mathcal{R}} = -d\mathcal{V}$$

ovvero

$$d(\mathcal{T} + \mathcal{V}) = 0$$

Si definisce *energia meccanica totale* \mathcal{E} di una particella la somma della sua energia cinetica e della sua energia potenziale:

$$\mathcal{E} = T + \mathcal{V} \quad (\text{A8})$$

e perciò

$$d\mathcal{E} = 0$$

da cui

$$\mathcal{E} = \text{cost.} \quad (\text{A9})$$

L'energia meccanica totale \mathcal{E} di una particella soggetta a forze derivanti da un potenziale non dipendente dal tempo si conserva.

Esempi.

• Ci proponiamo di mostrare come la legge di conservazione dell'energia meccanica totale di un pendolo avente massa m_0 e lunghezza l può essere utilizzata per determinare l'equazione del moto del pendolo. La (A8) diviene (v. fig. 2):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_0 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \mathcal{V}(s)$$

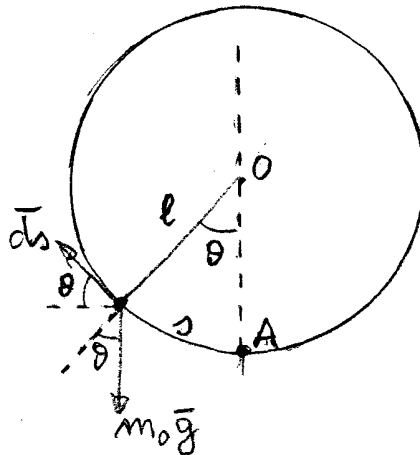


fig. 2

Ma è

$$s = l\theta$$

e

$$\mathcal{V}(\theta) = -m_0 \int_0^\theta \bar{g} \cdot \overline{ds} = -m_0 \int_0^\theta g ds \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = m_0 g \int_0^\theta \sin \alpha ds = m_0 gl \int_0^\theta \sin \alpha d\alpha$$

da cui infine

$$\mathcal{V}(\theta) = m_0 gl(1 - \cos \theta) \quad (\text{A10})$$

Per inciso, notiamo che se \overline{ds} ha verso opposto a quello indicato in figura (perché il pendolo si sta avvicinando al punto A) occorre scrivere:

$$\mathcal{V}(\theta) = -m_0 \int_\theta^0 \bar{g} \cdot \overline{ds} = -m_0 \int_\theta^0 g ds \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -m_0 gl \int_\theta^0 \sin \alpha d\alpha$$

uguale al precedente.

L'equazione di conservazione dell'energia totale del pendolo è espressa da

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_0l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + m_0gl(1 - \cos \theta)$$

ovvero, essendo $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_0l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2m_0gl \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

da cui, dividendo per $2m_0l^2$

$$\left(\frac{d\frac{\theta}{2}}{dt} \right)^2 = \frac{\mathcal{E}}{2m_0l^2} - \frac{g}{l} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{A11})$$

La (A11) è una equazione differenziale non lineare del primo ordine nell'incognita $\theta/2$. Risolvendola si ottiene l'equazione oraria del pendolo.

- Ci proponiamo di mostrare che l'energia totale \mathcal{E} di un oscillatore monodimensionale armonico avente massa m_0 e costante elastica k_e è una costante che può essere espressa in funzione della ampiezza massima \mathcal{R}_{max} della elongazione dell'oscillatore rispetto alla sua posizione di riposo.

La (A8) diviene:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_0\mathcal{U}^2 + \frac{1}{2}k_e\mathcal{R}^2$$

La \mathcal{E} rimane invariata quale che sia l'istante in cui la calcoliamo, perciò se scegliamo l'istante iniziale t_0 si può scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}m_0\mathcal{U}_0^2 + \frac{1}{2}k_e\mathcal{R}_0^2 \quad ; \quad \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}(t_0) \quad ; \quad \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}(t_0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{k_e}{\omega^2} \mathcal{U}_0^2 + \frac{1}{2}k_e\mathcal{R}_0^2 \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k_e}{m_0}} \\ &= \frac{1}{2}k_e \left(\mathcal{R}_0^2 + \frac{\mathcal{U}_0^2}{\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

Se ora risolviamo l'equazione del moto dell'oscillatore

$$m_0\ddot{\mathcal{R}}(t) + k_e\mathcal{R}(t) = 0$$

ottenendo

$$\mathcal{R}(t) = \sqrt{\mathcal{R}_0^2 + \frac{\mathcal{U}_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega(t - t_0) - \gamma) \quad ; \quad \gamma = \cos^{-1} \frac{\mathcal{R}_0}{\sqrt{\mathcal{R}_0^2 + \frac{\mathcal{U}_0^2}{\omega^2}}}$$

e se da questa ricaviamo l'espressione della elongazione massima dell'oscillatore

$$\mathcal{R}_{max} = \sqrt{\mathcal{R}_0^2 + \frac{\mathcal{U}_0^2}{\omega^2}}$$

possiamo scrivere (v. eq. (A12))

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}k_e\mathcal{R}_{max}^2 \quad (\text{A13})$$

La (A13) è in accordo col fatto che quando l'oscillatore raggiunge il massimo della sua elongazione tutta la sua energia è potenziale perché la sua velocità è nulla e quindi tutta l'energia cinetica si è trasformata in energia potenziale.

* * *

Riprendiamo in esame la (A7).

Il suo membro sinistro è, nel caso più generale, la somma di forze derivabili da un potenziale e di altre forze, che indicheremo con $\overline{\mathcal{F}}_{NC}$, non derivabili da alcun potenziale. Si ha allora:

$$\overline{\mathcal{F}} \cdot \overline{d\ell} + \overline{\mathcal{F}}_{NC} \cdot \overline{d\ell} = d\mathcal{T}$$

ovvero

$$\overline{\mathcal{F}} \cdot \overline{d\ell} = d\mathcal{T} - \overline{\mathcal{F}}_{NC} \cdot \overline{d\ell}$$

Tenendo presente la definizione di potenziale si ottiene:

$$-d\mathcal{V} = d\mathcal{T} - \overline{\mathcal{F}}_{NC} \cdot \overline{d\ell}$$

ovvero

$$d(\mathcal{T} + \mathcal{V}) = \overline{\mathcal{F}}_{NC} \cdot \overline{d\ell} \quad (\text{A14})$$

Se risulta $\overline{\mathcal{F}}_{NC} = 0$, allora

$$d(\mathcal{T} + \mathcal{V}) = 0 \quad (\text{A15})$$

e si ottiene ancora la (A9):

$$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \text{cost.} \quad (\text{A16})$$

Le forze che permettono il verificarsi della (A16) sono dette *conservative*.

Se vi sono forze *non conservative* $\overline{\mathcal{F}}_{NC}$, la quantità a membro sinistro della (A15) si può ancora chiamare energia totale della particella, però la (A15) ci dice che essa non rimane costante nel tempo. Fra le forze non conservative ricordiamo le cosiddette *forze resistenti*, che durante il moto della particella compiono su di essa lavoro negativo (attrito), cosicché la (A15) diviene:

$$d(\mathcal{T} + \mathcal{V}) < 0$$

Segue che la quantità $\mathcal{T} + \mathcal{V}$ va diminuendo nel tempo di una entità pari al lavoro delle forze resistenti.

Appendice B

LEGGI DI CONSERVAZIONE IN MECCANICA LAGRANGIANA

La Meccanica di Lagrange (v. l'Appendice K dello studio (a)) permette di definire importanti generalizzazioni delle leggi newtoniane di conservazione del momento lineare, del momento angolare e dell'energia.

1) *LEGGE DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO GENERALIZZATO*

Consideriamo la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ di un sistema fisico, essendo $q \equiv q^1, q^2, \dots, q^n$ l'insieme delle coordinate-posizione del punto rappresentativo del sistema nello spazio delle configurazioni e $\dot{q} \equiv \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n$ le associate velocità ed essendo n il numero dei gradi di libertà del sistema.

La quantità

$$p_k(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^k} \quad (\text{B1})$$

è detta *momento generalizzato* associato alla coordinata q^k .

Per renderci conto del significato e della denominazione di p_k esaminiamo alcuni esempi.

- Dalla lagrangiana seguente, espressa in coordinate cartesiane ortogonali

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m_0^{(k)} \dot{x}_k^2 - \mathcal{V}(x)$$

non dipendente esplicitamente da t e nella quale l'energia potenziale non dipende dalla velocità si ricava

$$p_{x_k} = m_0^{(k)} \dot{x}_k \quad ; \quad [p_{x_k}] = \text{momento}$$

Si vede quindi che in questo caso il momento generalizzato p_{x_k} associato a x_k coincide con il ben noto momento lineare newtoniano (o quantità di moto newtoniana).

- Dalla lagrangiana di una particella di massa m_0 libera di muoversi nello spazio e soggetta a forza centrale derivante da energia potenziale $\mathcal{V}(\rho)$ funzione della sola distanza ρ da un centro fisso di forze origine di un sistema di coordinate sferiche ρ, θ, φ , espressa dall'eq. (K45) dell'Appendice K dello studio (a) che qui riportiamo

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m_0 (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \mathcal{V}(\rho)$$

si ricava

$$p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m_0 \dot{\rho} \quad ; \quad [p_\rho] = MLT^{-1} = \text{momento lineare}$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m_0 \rho^2 \dot{\theta} \quad ; \quad [p_\theta] = ML^2T^{-1} = \text{momento angolare}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m_0 \rho^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad ; \quad [p_\varphi] = ML^2T^{-1} = \text{momento angolare}$$

Si vede quindi che il momento generalizzato può avere le dimensioni sia di un momento lineare che di un momento angolare newtoniani.

- Dalla lagrangiana di una particella di massa m_0 e carica q in moto in un campo elettromagnetico descritto dai potenziali φ e \overline{A} espressa dall'eq. (K108) dell'Appendice K dello studio (a) che qui riportiamo

$$\mathcal{L}(\overline{\mathcal{R}}, \dot{\overline{\mathcal{R}}}, t) = \frac{1}{2} m_0 \dot{\overline{\mathcal{R}}}^2 - q \left\{ \varphi(\overline{\mathcal{R}}, t) - \frac{\overline{A}(\overline{\mathcal{R}}, t) \cdot \dot{\overline{\mathcal{R}}}}{c} \right\}$$

nel caso di coordinate cartesiane ortogonali $\overline{\mathcal{R}} \equiv x_1, x_2, x_3$, si ricava

$$p_{x_k} = m_0 \dot{x}_k + \frac{q}{c} A_k \quad ; \quad k = 1, 2, 3 \quad ; \quad [p_{x_k}] = \text{momento}$$

Si vede quindi che, quando l'energia potenziale dipende dalla velocità, il momento generalizzato è diverso da quello newtoniano anche nel caso di coordinate cartesiane ortogonali.

Da questi esempi si ricava la conclusione che il momento generalizzato costituisce una estensione della definizione di momento newtoniano.

Ciò posto, consideriamo un sistema fisico avente lagrangiana non dipendente esplicitamente dal tempo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$$

Supponiamo che la \mathcal{L} non dipenda da una delle coordinate-posizione, ad esempio la q^i . In tal caso, dall'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = 0$$

e, facendo uso della definizione di momento generalizzato,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$$

si può scrivere

$$\frac{dp_i}{dt} = 0 \tag{B2}$$

cioè p_i è una costante del moto.

Dunque il momento generalizzato p_i associato alla coordinata-posizione q^i si conserva nel tempo se la lagrangiana non dipende da q^i e non dipende esplicitamente da t , cosicché $p_i = p_i(q, \dot{q})$ dove $q \equiv q^1, q^2, \dots, q^{i-1}, q^{i+1}, \dots, q^n$.

Ora, si definisce *ciclica* una coordinata-posizione che non compare nella lagrangiana, mentre compare la sua derivata temporale.

La (B2) esprime quindi il fatto che il momento p_i associato a una coordinata-posizione ciclica q^i è una costante del moto.

In particolare:

1) se q^i è una coordinata di traslazione lungo una direzione individuata dal versore \bar{n} , si può mostrare che la coordinata p_i ad essa associata è la componente lungo \bar{n} di un momento lineare, perciò si può affermare che *il momento lineare associato a una coordinata di traslazione ciclica è una costante del moto*;

2) se q^i è una coordinata di rotazione attorno a un asse individuato dal versore \bar{n} , si può mostrare che la coordinata p_i ad essa associata è la componente lungo \bar{n} di un momento angolare, perciò si può affermare che *il momento angolare associato a una coordinata di rotazione ciclica è una costante del moto*.

Esempio:

- Come esempio di pratica applicazione delle leggi di conservazione del momento generalizzato studiamo il moto tridimensionale di una particella di massa m_0 soggetta a forze derivanti da energia potenziale $\mathcal{V}(\rho)$ funzione solo della distanza ρ da un centro di forze che assumiamo come origine di un sistema di coordinate sferiche ρ, θ, φ cui riferiremo il moto.

Sappiamo dall'Appendice A che il moto di una particella soggetta a forze centrali si svolge su un piano. Siamo quindi indotti, per semplificare la trattazione del problema, a scegliere l'asse polare del sistema di riferimento (cioè l'asse avente direzione individuata da $\theta = 0$) perpendicolare a questo piano, cosicché la posizione della particella è individuata dalle coordinate ρ, φ definite sul piano $\theta = \pi/2$.

La lagrangiana della particella è espressa dalla (K43) dell'Appendice K dello studio (a) cioè:

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}; \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m_0(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \mathcal{V}(\rho) \quad (\text{B3})$$

nella quale la coordinata posizione φ è ciclica e perciò la coordinata momento angolare p_φ ad essa associata è costante. Le due equazioni di Lagrange relative a φ e ρ sono:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m_0\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \\ \frac{d}{dt}(m_0\dot{\rho}) - m_0\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\rho} = 0 \end{cases} \quad (\text{B4})$$

Dalla prima risulta appunto che p_φ è costante (per semplicità scriveremo talvolta p in luogo di p_φ)

$$m_0\rho^2\dot{\varphi} = p_\varphi \equiv p = \text{cost.} \quad (\text{B5})$$

Ricaviamo dalla (2) (pag. 4) l'espressione del momento angolare della particella in coordinate sferiche

$$\bar{L} = -m_0\rho^2\dot{\varphi}\bar{e}_\theta \quad ; \quad |\bar{L}| = m_0\rho^2\dot{\varphi} = p_\varphi \equiv p$$

Facendo coincidere l'asse polare con l'asse z di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (gli assi x e y giacciono nel piano in cui la particella si muove) si può scrivere

$$\bar{L} = m_0\rho^2\dot{\varphi}\bar{k} \quad ; \quad p_\varphi \equiv p = L_z = |\bar{L}| = \text{cost.} \quad (\text{B6})$$

Ricavando $\dot{\varphi}$ dalla (B5) e sostituendolo nella seconda delle (B4) si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(m_0\dot{\rho}) - \frac{p^2}{m_0\rho^3} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\rho} = 0 \quad (\text{B7})$$

Questa può essere interpretata come l'equazione del moto unidimensionale di una particella soggetta alla forza

$$\frac{p^2}{m_0\rho^3} - \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\rho}$$

ovvero all'energia potenziale

$$\mathcal{V}'(\rho) = - \int_{\infty}^{\rho} \left(\frac{p^2}{m_0\xi^3} - \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} \right) d\xi = \left[\frac{p^2}{2m_0\xi^2} + \mathcal{V}(\xi) \right]_{\infty}^{\rho} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0\rho^2} + \mathcal{V}(\rho) - (0 + \mathcal{V}(\infty))$$

e infine, assumendo che sia $\mathcal{V}(\infty) = 0$

$$\mathcal{V}'(\rho) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0\rho^2} + \mathcal{V}(\rho) \quad (\text{B8})$$

cosicché la (B7) si può scrivere

$$m_0\ddot{\rho} = - \frac{\partial\mathcal{V}'(\rho)}{\partial\rho} = - \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0\rho^2} + \mathcal{V} \right) \quad (\text{B9})$$

Una volta noto $\rho = \rho(t)$, per ottenere $\varphi(t)$ basta integrare la

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{m_0\rho^2}$$

Per ciò che riguarda il momento associato a θ si ha evidentemente $p_{\theta} = 0$, mentre il momento associato a ρ vale $p_{\rho} = m_0\dot{\rho}$. La particella possiede quindi le seguenti coordinate-momento:

$$p_{\rho} = m_0\dot{\rho} \quad ; \quad p_{\theta} = 0 \quad ; \quad p_{\varphi} \equiv p = L_z = |\bar{L}| = m_0\rho^2\dot{\varphi}$$

II) LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA TOTALE GENERALIZZATA

Consideriamo un sistema fisico la cui lagrangiana non dipenda esplicitamente dal tempo (cioè con vincoli scleronomi e con energia potenziale non dipendente esplicitamente da t). La derivata totale della lagrangiana rispetto al tempo è espressa da

$$\frac{d\mathcal{L}(q, \dot{q})}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} \quad (\text{B10})$$

Tenendo presenti le equazioni di Lagrange si può scrivere:

$$\frac{d\mathcal{L}(q, \dot{q})}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt}$$

ovvero, per la regola della derivata di un prodotto:

$$\frac{d\mathcal{L}(q, \dot{q})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right)$$

da cui

$$\frac{d\mathcal{L}(q, \dot{q})}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) = 0$$

e infine

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \right) = 0 \quad (\text{B11})$$

La quantità

$$\dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (\text{B12})$$

che si può scrivere anche così

$$\dot{q}^k p_k - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (\text{B13})$$

si conserva nel tempo

$$\dot{q}^k p_k - \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \text{cost.}$$

e può essere chiamata *energia generalizzata* per la ragione che ora verrà illustrata.

Consideriamo una \mathcal{L} particolare nella quale l'energia potenziale \mathcal{V} non dipende da \dot{q} . Si ha allora dalla (K33) dell'Appendice K dello studio (a):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \left(\mathcal{T}(q, \dot{q}) - \mathcal{V}(q) \right) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}^k}$$

perciò la (B11) diviene

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}^k} - \mathcal{L} \right) = 0 \quad (\text{B14})$$

D'altra parte sappiamo che nel caso di vincoli scleronomi, nel quale ci troviamo, l'energia cinetica ha espressione (K37) dell'Appendice K dello studio (a) perciò:

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \left(\frac{1}{2} G_{jl} \dot{q}^j \dot{q}^l \right) = \frac{1}{2} G_{kl} \dot{q}^l + \frac{1}{2} G_{jk} \dot{q}^j = \frac{1}{2} G_{kl} \dot{q}^l + \frac{1}{2} G_{kl} \dot{q}^l$$

e quindi

$$\dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{1}{2} G_{kl} \dot{q}^k \dot{q}^l + \frac{1}{2} G_{kl} \dot{q}^k \dot{q}^l = 2\mathcal{T}$$

Sostituendo questa espressione nella (B14) si ha

$$\frac{d}{dt} (2\mathcal{T} - \mathcal{L}) = \frac{d}{dt} \left(2\mathcal{T} - (\mathcal{T} - \mathcal{V}) \right) = \frac{d}{dt} (\mathcal{T} + \mathcal{V}) = 0$$

da cui

$$\mathcal{T} + \mathcal{V} = \mathcal{E} = \text{cost.} \quad (\text{B15})$$

Si vede quindi che la (B13), nel caso di una lagrangiana in cui l'energia potenziale non dipende dalla velocità, coincide con l'energia totale newtoniana del sistema. Da qui il nome

di *energia generalizzata* che può essere data alla (B13), perché costituisce una estensione della definizione di energia totale newtoniana espressa dalla (B15).

Esempi.

- Per esemplificare consideriamo la lagrangiana di una particella di massa m_0 e carica q soggetta a potenziali φ e \overline{A} espressa dalla (K108) dell'Appendice K dello studio (a) che qui riscriviamo:

$$\mathcal{L}(\overline{\mathcal{R}}, \dot{\overline{\mathcal{R}}}) = \frac{1}{2}m_0\dot{\overline{\mathcal{R}}}^2 - q\varphi(\overline{\mathcal{R}}) + \frac{q}{c}\overline{A}(\overline{\mathcal{R}}) \cdot \dot{\overline{\mathcal{R}}}$$

Applicando la definizione (B12) si ottiene per l'energia generalizzata l'espressione:

$$\mathcal{E} = \dot{\overline{\mathcal{R}}} \cdot (m_0\dot{\overline{\mathcal{R}}} + \frac{q}{c}\overline{A}) - \frac{1}{2}m_0\dot{\overline{\mathcal{R}}}^2 + q\varphi - \frac{q}{c}\overline{A} \cdot \dot{\overline{\mathcal{R}}} = \frac{1}{2}m_0\dot{\overline{\mathcal{R}}}^2 + q\varphi$$

Introduciamo il momento generalizzato

$$\overline{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\overline{\mathcal{R}}}} = m_0\dot{\overline{\mathcal{R}}} + \frac{q}{c}\overline{A}$$

da cui

$$\dot{\overline{\mathcal{R}}} = \frac{(\overline{p} - \frac{q}{c}\overline{A})}{m_0}$$

La (B13) diventa allora

$$\mathcal{E} = q\varphi + \frac{(\overline{p} - \frac{q}{c}\overline{A})^2}{2m_0} = \text{cost.} \quad (\text{B16})$$

- Ancora per esemplificare consideriamo la lagrangiana di un oscillatore monodimensionale, cioè di una particella di massa m_0 (v. fig. 1) in moto unidimensionale sotto l'azione di una forza elastica di richiamo proporzionale alla distanza della particella dall'origine (costante di proporzionalità = k_e)

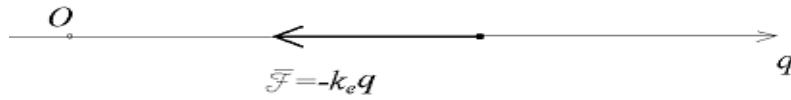


fig. 1

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_0\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k_e q^2 \quad (\text{B17})$$

oppure, introducendo la frequenza angolare del moto della particella:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m_0}} \quad (\text{B18})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_0(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \quad (\text{B19})$$

La (B12) diventa

$$\mathcal{E} = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_0\dot{q}^2 + \frac{1}{2}k_e q^2 = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \text{cost.} \quad (\text{B20})$$

• Ci proponiamo ora di mostrare come la legge di conservazione dell'energia può essere applicata vantaggiosamente allo studio del moto di una particella.

Riprendiamo a questo fine il caso, già affrontato al termine della parte I) di questa Appendice, di una particella in un campo di forze centrali. La lagrangiana è espressa dalla (B3). La (B12) diventa

$$\mathcal{E} = \dot{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} + \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m_0 (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \mathcal{V}(\rho) = \text{cost.} \quad (\text{B21})$$

D'altra parte sappiamo (v. eq. (B5)) che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m_0 \rho^2 \dot{\varphi} = p = \text{cost.}$ perciò

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{m_0 \rho^2} \quad (\text{B22})$$

e quindi, sostituendo nella (B21)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_0 \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0 \rho^2} + \mathcal{V}(\rho) \quad (\text{B23})$$

Risolvendo la (B23) rispetto a $\dot{\rho}$ si ottiene:

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{m_0} \left(\mathcal{E} - \mathcal{V} - \frac{p^2}{2m_0 \rho^2} \right)} \quad (\text{B24})$$

da cui

$$\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m_0} \left(\mathcal{E} - \mathcal{V} - \frac{p^2}{2m_0 \rho^2} \right)}} = dt \quad (\text{B25})$$

Se ora integriamo assumendo che l'istante iniziale sia $t = 0$ otteniamo:

$$t = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m_0} \left(\mathcal{E} - \mathcal{V} - \frac{p^2}{2m_0 \xi^2} \right)}} \quad (\text{B26})$$

La (B26) definisce una $t = t(\rho, \rho_0, \mathcal{E}, p)$, ma può essere invertita in modo che fornisca $\rho = \rho(t, \mathcal{E}, p, \rho_0)$. Noto ρ si può ottenere φ dalla (B22)

$$d\varphi = \frac{p}{m_0 \rho^2} dt \quad (\text{B27})$$

mediante integrazione:

$$\varphi = \int_0^t \frac{p}{m_0 \rho^2(\xi)} d\xi + \varphi_0 \quad (\text{B28})$$

In definitiva si ha:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(t, \mathcal{E}, p, \rho_0) \quad ; \quad 3 \text{ costanti di integrazione : } \mathcal{E}, p, \rho_0 \\ \varphi &= \varphi(t, \mathcal{E}, p, \rho_0, \varphi_0) \quad ; \quad 4 \text{ costanti di integrazione : } \mathcal{E}, p, \rho_0, \varphi_0 \end{aligned} \quad (\text{B29})$$

* * *

Talvolta si è interessati, più che alle equazioni orarie $\rho = \rho(t)$ e $\varphi = \varphi(t)$, all'equazione della traiettoria $\rho = \rho(\varphi)$. Per ottenere quest'ultima si può eliminare dt fra le (B25) e (B27). Si ottiene così:

$$d\varphi = \frac{p}{m_0\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m_0} \left(\mathcal{E} - \mathcal{V} - \frac{p^2}{2m_0\rho^2} \right)}} = \frac{p \frac{d\rho}{\rho^2}}{\sqrt{2m_0 \left(\mathcal{E} - \mathcal{V} - \frac{p^2}{2m_0\rho^2} \right)}} \quad (\text{B30})$$

Consideriamo il caso

$$\mathcal{V} = -\frac{k}{\rho} \quad ; \quad [k] = L \cdot \text{energia} = L \cdot ML^2T^{-2} \quad (\text{B31})$$

e proponiamoci di effettuare l'integrazione della (B30) ponendo innanzitutto

$$u = \frac{1}{\rho} \quad (\text{B32})$$

da cui

$$du = -\frac{d\rho}{\rho^2}$$

e poi raccogliendo p^2 nel denominatore dell'integrando e introducendo una costante di integrazione φ'

$$\varphi = \varphi' + \int \frac{p(-du)}{\sqrt{p^2 \left(-u^2 + \frac{2m_0k}{p^2}u + \frac{2m_0\mathcal{E}}{p^2} \right)}} = \varphi' - \int \frac{du}{\sqrt{-u^2 + \frac{2m_0k}{p^2}u + \frac{2m_0\mathcal{E}}{p^2}}} \quad (\text{B33})$$

Integrando, poiché

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

si ottiene

$$\varphi = \varphi' - \frac{-1}{\sqrt{-(-1)}} \sin^{-1} \frac{-2u + \frac{2m_0k}{p^2}}{\frac{2m_0k}{p^2} \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}p^2}{m_0k^2}}} = \varphi' + \sin^{-1} \frac{1 - \frac{p^2}{m_0k}u}{\sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}p^2}{m_0k^2}}}$$

ovvero

$$\sin(\varphi - \varphi') = -\cos\left(\varphi - \varphi' + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 - \frac{p^2}{m_0k}u}{\sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}p^2}{m_0k^2}}}$$

Risolvendo rispetto a $u = 1/\rho$ e inglobando la costante $\pi/2$ in φ' si trova

$$\frac{1}{\rho} = \frac{m_0k}{p^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}p^2}{m_0k^2}} \cos(\varphi - \varphi') \right\} \quad (\text{B34})$$

Ora ricordiamo che l'equazione in coordinate polari di una conica avente un fuoco nell'origine delle coordinate è

$$\frac{1}{\rho} = C \{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi')\} \quad (\text{B35})$$

dove ε rappresenta l'eccentricità.

Confrontando con la (B34) si constata che $\rho = \rho(\varphi)$ è una conica con eccentricità data da

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}p^2}{m_0k^2}} \quad (\text{B36})$$

che abbiamo potuto ottenere espressa in funzione di \mathcal{E} e p proprio come conseguenza del tipo di integrazione effettuato.

Al variare di ε si hanno i seguenti tipi di orbita:

$$\varepsilon > 1 ; \mathcal{E} > 0 \quad \text{iperbole} \quad (\text{B37})$$

$$\varepsilon = 1 ; \mathcal{E} = 0 \quad \text{parabola} \quad (\text{B38})$$

$$\varepsilon < 1 ; \mathcal{E} < 0 \quad \text{ellisse} \quad (\text{B39})$$

$$\varepsilon = 0 ; \mathcal{E} = -\frac{m_0k^2}{2p^2} \quad \text{cerchio di raggio } \rho = \frac{p^2}{m_0k} ; [\rho] = \frac{(ML^2T^{-1})^2}{M \cdot L \cdot ML^2T^{-2}} = L \quad (\text{B40})$$

Si dice *legata* o *in stato legato* una particella che percorra orbite corrispondenti a energia negativa (ellisse, cerchio).

Appendice C

ANALISI QUALITATIVA DEL MOTO DI UNA PARTICELLA IN
REGIME DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA TOTALE

La legge di conservazione dell'energia ha risvolti pratici importanti.

Essa permette di farsi un'idea rapida e precisa del moto di una particella senza che sia necessario procedere a risolvere l'equazione fondamentale della meccanica. Essa permette anche di farsi un'idea qualitativa delle caratteristiche di un moto quasi senza eseguire calcoli, facendo ricorso a una analisi grafica che ora mostreremo.

Consideriamo il moto unidimensionale lungo l'asse x di una particella avente massa m_0 , velocità \mathcal{U} e soggetta a forze derivanti da energia potenziale $\mathcal{V}(x)$. L'energia totale della particella rimane costante e uguale a

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_0\mathcal{U}^2 + \mathcal{V}(x) \quad (C1)$$

da cui

$$\mathcal{U} = \pm \sqrt{\frac{2}{m_0}(\mathcal{E} - \mathcal{V})} \quad (C2)$$

Ora supponiamo che la funzione $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x)$ sia quella riportata in fig. 1, dove sono indicati anche vari livelli dell'energia totale \mathcal{E} .

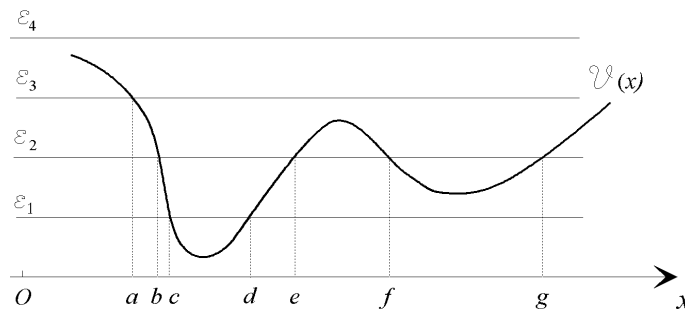


fig. 1

Osserviamo che, per la (C2), la radice della differenza fra le curve $\mathcal{E} = cost.$ e $\mathcal{V}(x)$ è proporzionale alla velocità \mathcal{U} della particella, perciò la velocità è reale dove questa differenza è positiva, mentre è immaginaria dove è negativa. Se la velocità è reale solo in uno o più intervalli di x , ciò significa che il moto è possibile solo in quegli intervalli.

Quando la particella si avvicina a un estremo di un intervallo la sua velocità scende a zero e infine, in corrispondenza dell'estremo, la particella si ferma. Dopo di ciò ricomincia il moto in verso opposto: ciò è in accordo col doppio segno della \mathcal{U} nella (C2).

Vediamo più in dettaglio che cosa succede se l'intervallo in cui l'energia $\mathcal{E} - \mathcal{V}$ è positiva è limitato: in questo caso la particella si muove da un estremo all'altro, avanti e indietro, generando un moto periodico. Esempi di moti periodici sono illustrati nella figura in corrispondenza di \mathcal{E}_1 (intervallo $c-d$) e di \mathcal{E}_2 (intervalli $b-e, f-g$).

Se l'intervallo in cui $\mathcal{E} - \mathcal{V}$ è positiva è limitato solo da una parte, come quello corrispondente a \mathcal{E}_3 , la particella, proveniente dall'infinito, arriva fino ad a poi torna indietro di nuovo verso l'infinito (esempio di moto non periodico).

Infine può succedere che $\mathcal{E} - \mathcal{V}$ rimanga sempre positiva, come è illustrato dal livello di energia \mathcal{E}_4 . In questo caso la particella, proveniente dall'infinito (positivo o negativo) prosegue nella sua direzione e si allontana verso l'infinito (negativo o positivo).

Si può dunque notare che il moto di una particella in un medesimo potenziale, ma con vari livelli di energia totale, può presentarsi in modalità assai diverse.

Notiamo che i moti oscillatori sono possibili attorno a punti di minima energia potenziale, a patto però che l'energia totale non sia troppo grande.

Se la \mathcal{E} è abbastanza grande, la particella può allontanarsi indefinitamente dal punto di minimo.

* * *

Come caso particolare consideriamo il moto unidimensionale di una particella avente massa m_0 e soggetta a forza

$$\mathcal{F} = -k_e x$$

derivante da energia potenziale

$$\mathcal{V}(x) = - \int_{x_0}^x (-k_e \xi) d\xi$$

dove assumiamo $x_0 = 0$ e $\mathcal{V}(x_0) = 0$ cosicché

$$\mathcal{V}(x) = \frac{k_e}{2} x^2 \tag{C3}$$

Si tratta dell'oscillatore unidimensionale armonico. L'energia totale della particella vale (v. fig. 2):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 + \frac{k_e}{2} x^2 \tag{C4}$$

da cui

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m_0} \left(\mathcal{E} - \frac{k_e}{2} x^2 \right)}$$

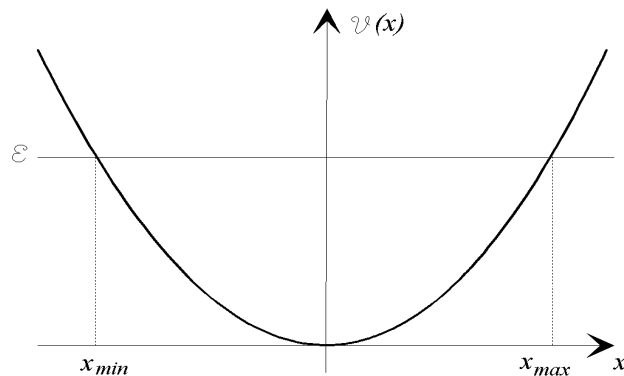


fig. 2

Il moto avviene in corrispondenza di valori di x tali per cui

$$\mathcal{E} - \frac{k_e}{2}x^2 \geq 0$$

ovvero per

$$x_{min.} = -\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{k_e}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{k_e}} = x_{max.} \quad (C5)$$

* * *

Come altro caso particolare consideriamo il moto unidimensionale di una particella di massa m_0 soggetta a forze derivanti da energia potenziale

$$\mathcal{V}(x) = \frac{k_e}{2}x^2 + ax^3 + bx^4 \quad (C6)$$

(oscillatore unidimensionale anarmonico). L'energia totale della particella vale (v. fig. 3):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_0\dot{x}^2 + \frac{k_e}{2}x^2 + ax^3 + bx^4 \quad (C7)$$

da cui

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m_0} \left(\mathcal{E} - \frac{k_e}{2}x^2 - ax^3 - bx^4 \right)} \quad (C8)$$

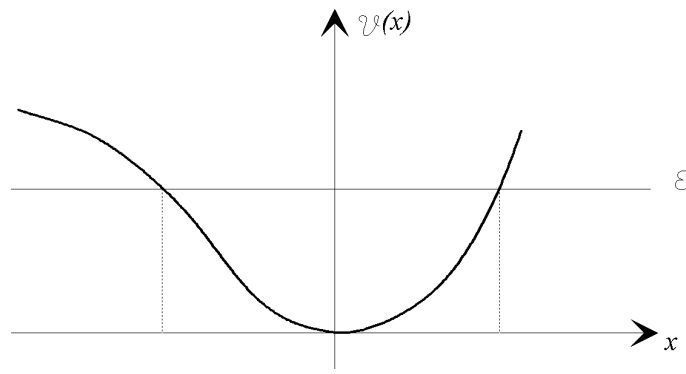


fig. 3

* * *

Infine consideriamo il moto di una particella in un campo di forze centrali derivanti dall'energia potenziale

$$\mathcal{V} = -\frac{k}{\rho}$$

L'energia totale si ricava allora dalla (B23) dell'Appendice B:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_0\dot{\rho}^2 + \frac{p^2}{2m_0\rho^2} - \frac{k}{\rho} \quad (C9)$$

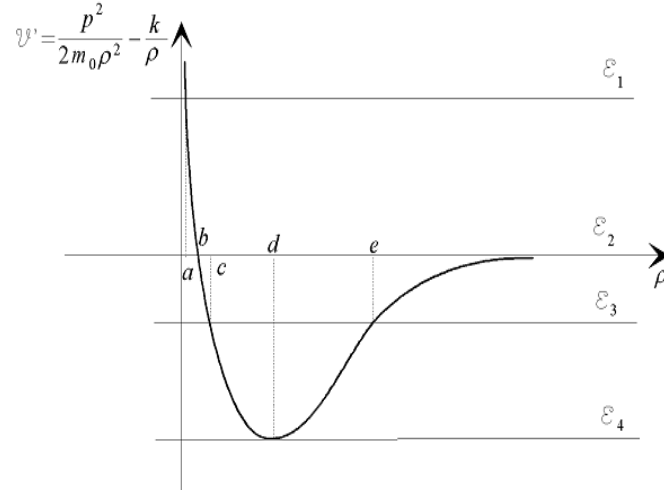


fig. 4

Da questa ricaviamo l'espressione della componente radiale della velocità:

$$\dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2}{m_0} \left[\mathcal{E} - \left(\frac{p^2}{2m_0 \rho^2} - \frac{k}{\rho} \right) \right]} \quad (\text{C10})$$

Riportiamo in un grafico (v. fig. 4) la quantità

$$\mathcal{V}' = \frac{p^2}{2m_0 \rho^2} - \frac{k}{\rho}$$

in funzione di ρ

Nel grafico sono riportati anche diversi valori di \mathcal{E} .

Il moto della particella, come sappiamo, è possibile in quegli intervalli di ρ in cui risulta

$$\mathcal{E} > \frac{p^2}{2m_0 \rho^2} - \frac{k}{\rho} \quad (\text{C11})$$

cioè

$$\mathcal{E} > \mathcal{V}' \quad (\text{C12})$$

Osserviamo che, poiché \mathcal{V}' può anche essere minore di zero, la (C12) è verificata anche per valori $\mathcal{E} < 0$.

Ciò posto, consideriamo il caso in cui la particella ha energia \mathcal{E}_1 e supponiamo che essa si stia avvicinando all'origine provenendo da $+\infty$. Si vede che il moto è possibile fino alla distanza minima $\rho = a$, poi la particella inverte il movimento e si allontana da a dirigendosi verso $+\infty$; la traiettoria descritta è un'iperbole.

Consideriamo poi il caso in cui la particella ha energia $\mathcal{E}_2 = 0$. Il moto è possibile fino alla distanza minima $\rho = b$, poi si ha l'inversione; la traiettoria descritta è una parabola.

Se la particella ha energia $\mathcal{E}_3 < 0$ il moto avviene fra i punti c ed e , cioè la traiettoria della particella è un'ellisse con perielio $\rho = c$ e afelio $\rho = e$. Si suole dire che la particella è legata al centro di forze.

Nel caso di \mathcal{E}_4 la particella è ancora legata e la sua traiettoria è un cerchio con raggio d .

Notiamo la corrispondenza con le (B37), (B38), (B39) e (B40) dell'Appendice B.

Appendice D

PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE

È dato un sistema fisico nello stato $|\chi\rangle$ e siano A e B gli operatori hermitiani associati a due osservabili ad esso relative.

Ci proponiamo di mostrare che il prodotto delle deviazioni standard delle due osservabili

$$\Delta A = \sqrt{\langle\chi|(A - \langle A\rangle)^2|\chi\rangle} \quad ; \quad \Delta B = \sqrt{\langle\chi|(B - \langle B\rangle)^2|\chi\rangle} \quad ; \quad \Delta A, \Delta B = \text{c-neri} \quad (\text{D1})$$

dove $\langle A\rangle = \langle\chi|A|\chi\rangle$ e $\langle B\rangle = \langle\chi|B|\chi\rangle$ sono i valori medi di A e B (v. l'eq. (826) dello studio (a)), sta nella seguente relazione col commutatore $[A, B] \equiv AB - BA$ degli operatori associati alle osservabili:

$$\Delta A \Delta B \geq \left| \langle\chi| \frac{AB - BA}{2i} |\chi\rangle \right| \quad (\text{D2})$$

A questo fine osserviamo che

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 = \langle\chi|(A - \langle A\rangle)^2|\chi\rangle \langle\chi|(B - \langle B\rangle)^2|\chi\rangle \quad (\text{D3})$$

Ma per due vettori qualsiasi $|\varphi\rangle$ e $|\theta\rangle$ vale la disuguaglianza di Schwarz:

$$|\langle\varphi|\theta\rangle|^2 \leq \langle\varphi|\varphi\rangle \langle\theta|\theta\rangle \quad (\text{D4})$$

Se poniamo

$$|\varphi\rangle = (A - \langle A\rangle)|\chi\rangle \quad ; \quad |\theta\rangle = (B - \langle B\rangle)|\chi\rangle$$

la disuguaglianza assume la forma seguente

$$\left| \langle\chi|(A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle)|\chi\rangle \right|^2 \leq \langle\chi|(A - \langle A\rangle)^\dagger|(A - \langle A\rangle)|\chi\rangle \langle\chi|(B - \langle B\rangle)^\dagger|(B - \langle B\rangle)|\chi\rangle$$

ovvero, poiché A e B sono hermitiani e quindi $(A - \langle A\rangle)^\dagger = (A - \langle A\rangle)$ e $(B - \langle B\rangle)^\dagger = (B - \langle B\rangle)$

$$\left| \langle\chi|(A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle)|\chi\rangle \right|^2 \leq \langle\chi|(A - \langle A\rangle)^2|\chi\rangle \langle\chi|(B - \langle B\rangle)^2|\chi\rangle$$

da cui, confrontando con la (D3):

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left| \langle\chi|(A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle)|\chi\rangle \right|^2$$

ovvero

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left| \langle\chi|(A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle)|\chi\rangle \right|^2 \quad (\text{D5})$$

Ma si può scrivere (v. eq. (583) dello studio (a))

$$\begin{aligned} (A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle) &= \frac{(A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle) + (B - \langle B\rangle)(A - \langle A\rangle)}{2} + \\ &\quad + i \frac{(A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle) - (B - \langle B\rangle)(A - \langle A\rangle)}{2i} \\ &= \frac{(A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle) + (B - \langle B\rangle)(A - \langle A\rangle)}{2} + i \frac{AB - BA}{2i} \end{aligned}$$

e quindi sostituendo nella (D5) si ottiene

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \left| \langle \chi | \frac{(A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) + (B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle)}{2} | \chi \rangle + i \langle \chi | \frac{[A, B]}{2i} | \chi \rangle \right|^2$$

Ma (v. par. 1.2.4 della Seconda Parte dello studio (a)) gli operatori $(A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) + (B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle)$ e $[A, B]/i$ sono hermitiani perciò i loro valori medi sono reali (v. l'eq. (719) dello studio (a)), e quindi il membro destro di quest'ultima espressione è del tipo $|a + ib|^2$ con a e b reali, perciò $|a + ib|^2 = a^2 + b^2$ e quindi

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \langle \chi | \frac{(A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) + (B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle)}{2} | \chi \rangle^2 + \langle \chi | \frac{[A, B]}{2i} | \chi \rangle^2$$

Il membro sinistro di questa disuguaglianza è ovviamente maggiore di ciascuno dei termini (entrambi positivi) a membro destro, perciò

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \langle \chi | \frac{[A, B]}{2i} | \chi \rangle^2 \quad (D6)$$

e infine

$$\Delta A \Delta B \geq \left| \langle \chi | \frac{[A, B]}{2i} | \chi \rangle \right| \quad (D7)$$

che coincide con la (D2).

Esempi.

- Se $A = x_k$ e $B = p_l$ si ha (v. eq. (345) dello studio (a)) la seguente regola di commutazione

$$[x_k, p_l] = i\hbar\delta_{kl}$$

perciò

$$\Delta x_k \Delta p_l \geq \left| \left\langle \frac{i\hbar\delta_{kl}}{2i} \right\rangle \right|$$

ovvero

$$\Delta x_k \Delta p_l \geq \frac{1}{2}\hbar\delta_{kl} \quad (D8)$$

- Se $A = L_x$ e $B = L_y$ si ha (v. eq. (622) dello studio (a)) la seguente regola di commutazione

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

perciò

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \left| \left\langle \frac{i\hbar L_z}{2i} \right\rangle \right|$$

ovvero

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{1}{2}\hbar |\langle L_z \rangle| \quad (D9)$$

Le relazioni D(8) e D(9) sono note come espressioni del *Principio di Indeterminazione* di Heisenberg, e dunque la (D2) rappresenta questo Principio espresso in funzione delle regole di commutazione degli operatori associati alle osservabili alle quali esso è riferito.

Appendice E

DESCRIZIONI QUANTISTICHE DELLA EVOLUZIONE TEMPORALE DI UN SISTEMA MECCANICO

In Meccanica Quantistica vi sono innumerevoli modi di descrivere l'evoluzione temporale di un sistema meccanico, ciascuno ottenibile da un altro mediante una trasformazione unitaria (sulle trasformazioni unitarie v. l'Appendice A dello studio "L'equazione di Dirac").

Ciò dipende dal fatto che le quantità accessibili alla misura diretta non sono i vettori di stato e gli operatori, che variano da descrizione a descrizione, ma gli autovalori degli operatori e la probabilità che il risultato di una certa misura fornisca un certo autovalore, e tali quantità rimangono invariate per una trasformazione unitaria U .

Infatti un vettore $|\chi\rangle$, per effetto di una trasformazione unitaria, che supponiamo venga effettuata mantenendo fissa la base cui i vettori e gli operatori sono riferiti, diviene

$$|\chi'\rangle = U|\chi\rangle \quad (\text{E1})$$

mentre un operatore A diviene

$$A' = UAU^\dagger \quad (\text{E2})$$

perciò data l'equazione agli autovalori

$$A|\chi_n\rangle = a_n|\chi_n\rangle$$

se moltiplichiamo a sinistra per U

$$UA|\chi_n\rangle = a_nU|\chi_n\rangle$$

e introduciamo il prodotto $U^\dagger U = \mathbb{1}$

$$UAU^\dagger U|\chi_n\rangle = a_nU|\chi_n\rangle$$

otteniamo

$$A'|\chi_n'\rangle = a_n|\chi_n'\rangle$$

e si vede che l'autovalore è rimasto invariato.

Per ciò che riguarda la probabilità dell'autovalore a_n espressa da $Prob(a_n) = \langle\chi|\mathcal{O}_n\chi\rangle = \langle\chi|a_n\rangle\langle a_n|\chi\rangle = \langle a_n|\chi\rangle^*\langle a_n|\chi\rangle$, dove \mathcal{O}_n è l'operatore di proiezione di $|\chi\rangle$ su $|a_n\rangle$ (v. eq.(770) dello studio (a)), essa rimane invariata per una trasformazione unitaria, come mostra la seguente equazione elaborata tenendo conto delle (E1) ed (E2):

$$Prob(a_n) = \langle\chi|\mathcal{O}_n\chi\rangle = \langle\chi|U^\dagger U\mathcal{O}_n U^\dagger U\chi\rangle = \langle\chi'|U\mathcal{O}_n U^\dagger\chi'\rangle = \langle\chi'|\mathcal{O}'_n\chi'\rangle$$

Anche il valor medio dell'operatore A rimane invariato:

$$\langle A \rangle = \langle\chi|A|\chi\rangle = \langle\chi|U^\dagger UAU^\dagger U|\chi\rangle = \langle\chi'|A'|\chi'\rangle$$

Infine rimane invariata anche la probabilità di transizione dallo stato $|\chi_A(t_0)\rangle$ allo stato $|\chi_B(t)\rangle$. Infatti dalla (21) si ricava:

$$\langle\chi_B(t)|T_S(t, t_0)|\chi_A(t_0)\rangle = \langle\chi_B(t)|U^\dagger UT_S(t, t_0)U^\dagger U|\chi_A(t_0)\rangle = \langle\chi'_B(t)|T'_S(t, t_0)|\chi'_A(t_0)\rangle$$

Come esempio di applicazione della proprietà della Meccanica quantistica di poter descrivere in più modi l'evoluzione temporale di un sistema fisico vogliamo mostrare che la descrizione di Schrödinger, nella quale lo stato di un sistema è espresso da un vettore $|\chi(t)\rangle$ funzione del tempo, mentre le osservabili sono associate a operatori indipendenti dal tempo, può essere ottenuta mediante una trasformazione unitaria dalla descrizione di Heisenberg, nella quale la evoluzione temporale viene descritta da osservabili associate a operatori variabili nel tempo, mentre il vettore di stato è costante.

Iniziamo col considerare nella descrizione di Heisenberg un operatore

$$A_H(t) \equiv A_H(x(t), p(t), t)$$

che in un istante \bar{t} coincide con l'operatore A_S ad esso corrispondente nella descrizione di Schrödinger:

$$A_H(\bar{t}) = A_S(\bar{t}) \quad (\text{E3})$$

Negli istanti t successivi a \bar{t} l'operatore A_H subisce una evoluzione descritta dall'equazione (v. l'eq. (739) dello studio (a))

$$A_H(t') = T_H(t', t) A_H(t) T_H^\dagger(t', t) \quad (\text{E4})$$

mentre l'equazione di Heisenberg per A_H è espressa da (v. l'eq. (742) dello studio (a))

$$\frac{dA_H(x(t), p(t), t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A_H, \mathcal{H}_H] + \frac{\partial A_H(x(t), p(t), t)}{\partial t} \quad (\text{E5})$$

Ovviamente A_S rimane invariato, a meno che non dipenda esplicitamente da t .

Ci proponiamo ora di determinare un operatore unitario U_S tale che applicandolo ad $A_H(t)$ si ottenga l'operatore $A_S(\bar{t})$ corrispondente di A_H nella descrizione di Schrödinger. Poiché vale la (E3) si può scrivere, in accordo con la (E4)

$$A_S(x(\bar{t}), p(\bar{t}), t) = U_S(t, \bar{t}) A_H(x(t), p(t), t) U_S^\dagger(t, \bar{t}) \quad (\text{E6})$$

Deriviamo quest'ultima rispetto a t , omettendo per semplicità di indicare la dipendenza funzionale di A_S , A_H e U_S da \bar{t} e/o t :

$$\frac{dA_S}{dt} = \frac{d}{dt} \{ U_S A_H U_S^\dagger \}$$

Poiché in A_S x e p non dipendono da t , segue:

$$\frac{\partial A_S}{\partial t} = \frac{dU_S}{dt} A_H U_S^\dagger + U_S \frac{dA_H}{dt} U_S^\dagger + U_S A_H \frac{dU_S^\dagger}{dt}$$

Il secondo termine a secondo membro può essere riscritto tenendo presente la (E4):

$$\frac{\partial A_S}{\partial t} = \frac{dU_S}{dt} A_H U_S^\dagger + \frac{1}{i\hbar} U_S [A_H, \mathcal{H}_H] U_S^\dagger + U_S \frac{\partial A_H}{\partial t} U_S^\dagger + U_S A_H \frac{dU_S^\dagger}{dt}$$

Ma, in accordo con la (E6), vale la seguente relazione

$$\frac{\partial A_S}{\partial t} = U_S \frac{\partial A_H}{\partial t} U_S^\dagger \quad (\text{E7})$$

perciò rimane

$$\frac{dU_S}{dt} A_H U_S^\dagger + \frac{1}{i\hbar} U_S [A_H, \mathcal{H}_H] U_S^\dagger + U_S A_H \frac{dU_S^\dagger}{dt} = 0$$

Moltiplicando a destra ciascun termine per U_S e a sinistra per U_S^\dagger ed essendo $U_S^\dagger U_S = \mathbf{1}$ segue

$$i\hbar U_S^\dagger \frac{dU_S}{dt} A_H + [A_H, \mathcal{H}_H] + i\hbar A_H \frac{dU_S^\dagger}{dt} U_S = 0$$

ovvero

$$i\hbar U_S^\dagger \frac{dU_S}{dt} A_H + A_H \mathcal{H}_H - \mathcal{H}_H A_H + i\hbar A_H \frac{dU_S^\dagger}{dt} U_S = 0$$

da cui

$$A_H \left(i\hbar \frac{dU_S^\dagger}{dt} U_S + \mathcal{H}_H \right) + \left(U_S^\dagger i\hbar \frac{dU_S}{dt} - \mathcal{H}_H \right) A_H = 0$$

Poiché questa relazione deve valere per ogni operatore A_H , segue

$$i\hbar \frac{dU_S^\dagger}{dt} U_S + \mathcal{H}_H = 0 \quad ; \quad i\hbar U_S^\dagger \frac{dU_S}{dt} - \mathcal{H}_H = 0$$

ovvero, moltiplicando a destra per U_S^\dagger la prima di queste equazioni e a sinistra per U_S la seconda

$$i\hbar \frac{dU_S^\dagger}{dt} + \mathcal{H}_H U_S^\dagger = 0 \tag{E8}$$

$$i\hbar \frac{dU_S}{dt} - U_S \mathcal{H}_H = 0 \tag{E9}$$

Queste sono le equazioni cui deve soddisfare un operatore unitario U_S che sia in grado di operare la trasformazione (E6). Una volta risolte (la condizione iniziale è $U_S(\bar{t}, \bar{t}) = \mathbf{1}$) e ottenuto U_S , abbiamo risolto anche il problema che ci eravamo posti.

Se \mathcal{H}_H non dipende esplicitamente dal tempo si ha:

$$U_S^\dagger(t, \bar{t}) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-\bar{t})\mathcal{H}_H} \quad ; \quad U_S(t, \bar{t}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-\bar{t})\mathcal{H}_H} \tag{E10}$$

Ora passiamo a considerare i vettori di stato. Assumiamo che in \bar{t} il vettore nella descrizione di Schrödinger sia uguale al vettore nella descrizione di Heisenberg; in ogni altro istante t si avrà (v. eq. (E1)):

$$|\chi_S(t)\rangle = U_S(t, \bar{t}) |\chi_H(\bar{t})\rangle \quad ; \quad U_S(\bar{t}, \bar{t}) = \mathbf{1} \tag{E11}$$

essendo U_S la soluzione della (E9). Ci aspettiamo, ovviamente, che il vettore $|\chi_S(t)\rangle$ così definito soddisfi l'equazione di Schrödinger. Per verificarlo deriviamo rispetto a t e moltiplichiamo per $i\hbar$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\chi_S\rangle = i\hbar \frac{dU_S}{dt} |\chi_H\rangle + U_S i\hbar \frac{d}{dt} |\chi_H\rangle \tag{E12}$$

Ma nella descrizione di Heisenberg $|\chi_H\rangle$ è costante, perciò $\frac{d}{dt} |\chi_H\rangle = 0$. Rimane così:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\chi_S\rangle = i\hbar \frac{dU_S}{dt} |\chi_H\rangle \tag{E13}$$

ovvero, per la (E9):

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\chi_S\rangle = U_S \mathcal{H}_H |\chi_H\rangle = U_S \mathcal{H}_H U_S^\dagger U_S |\chi_H\rangle = \mathcal{H}_S U_S |\chi_H\rangle \quad (\text{E14})$$

Tenendo presente la (E11) si ha infine

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\chi_S\rangle = \mathcal{H}_S |\chi_S\rangle \quad (\text{E15})$$

che è la descrizione di Schrödinger della evoluzione temporale del sistema.

Riprendiamo quanto si è detto all'inizio di questa Appendice a proposito dei modi in cui può essere descritta l'evoluzione temporale di un sistema.

Finora ne abbiamo evidenziato due, corrispondenti a distribuzioni, per così dire, estreme della dipendenza temporale degli oggetti matematici fondamentali della meccanica quantistica, cioè vettori ed operatori: nella descrizione di Schrödinger la dipendenza temporale è allocata esclusivamente sul vettore di stato, mentre nella descrizione di Heisenberg è allocata solo sugli operatori.

Tuttavia ogni altra descrizione "intermedia" fra queste due nella quale la dipendenza temporale sia allocata in parte sul vettore di stato e in parte sugli operatori è valida e può essere ottenuta da qualunque altra mediante una trasformazione unitaria.

* * *

Vi sono sistemi fisici la cui hamiltoniana può essere separata in due parti di cui una, \mathcal{H}_0 , è rappresentativa di parti isolate di cui il sistema fisico è composto, e l'altra, \mathcal{H}_{int} , è rappresentativa delle interazioni delle parti isolate:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}$$

Per questi sistemi è vantaggioso introdurre la *descrizione di interazione* nella quale l'hamiltoniana ha espressione

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_{I0} + \mathcal{H}_{Iint} \quad (\text{E16})$$

Nella descrizione di interazione sia il vettore di stato che gli operatori dipendono dal tempo, però il primo dipende come se fosse $\mathcal{H}_I \equiv \mathcal{H}_{Iint}$, cioè come se della hamiltoniana esistesse solo la parte \mathcal{H}_{Iint} , mentre i secondi dipendono come se esistesse solo \mathcal{H}_{I0} . In altre parole la descrizione di interazione è simile alla descrizione di Schrödinger per ciò che riguarda il vettore di stato, ma l'hamiltoniana è ridotta alla sola \mathcal{H}_{Iint} , ed è simile alla descrizione di Heisenberg per ciò che riguarda gli operatori, ma l'hamiltoniana è ridotta alla sola \mathcal{H}_{I0} .

Indichiamo con $|\chi_I\rangle$ il vettore di stato nella descrizione di interazione. Ci proponiamo di stabilire una connessione fra $|\chi_I\rangle$ e il vettore $|\chi_S\rangle$ della descrizione di Schrödinger determinando un operatore unitario U_I tale che applicandolo al vettore di stato nella descrizione di Schrödinger $|\chi_S\rangle$ si ottenga il vettore di stato $|\chi_I\rangle$ nella descrizione di interazione

$$|\chi_I(t)\rangle = U_I(t) |\chi_S(t)\rangle \quad ; \quad U_I(0) = \mathbf{1} \quad (\text{E17})$$

A questo fine deriviamo la (E17) rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt} |\chi_I\rangle = \frac{dU_I}{dt} |\chi_S\rangle + U_I \frac{d}{dt} |\chi_S\rangle \quad (\text{E18})$$

Ricordando la (E15) si può scrivere:

$$\frac{d}{dt}|\chi_I\rangle = \frac{dU_I}{dt}|\chi_S\rangle + \frac{U_I}{i\hbar}\mathcal{H}_S|\chi_S\rangle = \left(\frac{dU_I}{dt} + \frac{1}{i\hbar}U_I\mathcal{H}_S\right)|\chi_S\rangle$$

Ora teniamo presenti le due parti in cui l'hamiltoniana \mathcal{H}_S può essere divisa:

$$\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_{S_0} + \mathcal{H}_{S_{int}} \quad (\text{E19})$$

cosicché

$$\frac{d}{dt}|\chi_I\rangle = \left(\frac{dU_I}{dt} + \frac{1}{i\hbar}U_I\mathcal{H}_{S_0} + \frac{1}{i\hbar}U_I\mathcal{H}_{S_{int}}\right)|\chi_S\rangle \quad (\text{E20})$$

Osserviamo che se imponiamo

$$\frac{dU_I}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}U_I\mathcal{H}_{S_0} \quad ; \quad \frac{dU_I^\dagger}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\mathcal{H}_{S_0}U_I^\dagger \quad (\text{E21})$$

e se a membro destro della (E20) inseriamo $U_I^\dagger U_I$ a sinistra di $|\chi_S\rangle$ otteniamo

$$i\hbar\frac{d|\chi_I\rangle}{dt} = U_I\mathcal{H}_{S_{int}}U_I^\dagger U_I|\chi_S\rangle$$

cosicché, tenendo anche conto della (E17), possiamo scrivere

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\chi_I\rangle = U_I(t)\mathcal{H}_{S_{int}}U_I^\dagger(t)|\chi_I\rangle$$

Ponendo ancora (in accordo con la (E2))

$$\mathcal{H}_{I_{int}}(t) = U_I(t)\mathcal{H}_{S_{int}}U_I^\dagger(t) \quad (\text{E22})$$

possiamo infine scrivere

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\chi_I\rangle = \mathcal{H}_{I_{int}}(t)|\chi_I\rangle \quad (\text{E23})$$

Abbiamo così ottenuto una equazione di evoluzione del vettore di stato simile alla corrispondente equazione nella descrizione di Schrödinger, ma in essa compare solo la parte $\mathcal{H}_{I_{int}}$ della hamiltoniana totale \mathcal{H}_I , il che significa che $|\chi_I\rangle$ evolve nel tempo come se esistesse solo $\mathcal{H}_{I_{int}}$.

Altre equazioni relative al vettore di stato nella descrizione di interazione, per le quali è possibile trovare corrispondenze nella descrizione di Schrödinger, sono determinabili con facilità.

Ad esempio, moltiplichiamo per $U_I(t)$ la (728) dello studio (a) che qui riscriviamo: $|\chi_S(t)\rangle = T_S(t, t_0)|\chi_S(t_0)\rangle$, e inseriamo $U_I^\dagger(t_0)U_I(t_0) = \mathbb{1}$ a sinistra di $|\chi_S(t_0)\rangle$ cosicché

$$U_I(t)|\chi_S(t)\rangle = U_I(t)T_S(t, t_0)U_I^\dagger(t_0)U_I(t_0)|\chi_S(t_0)\rangle$$

Ricordando la (E17) e ponendo

$$V(t, t_0) = U_I(t)T_S(t, t_0)U_I^\dagger(t_0) \quad (\text{E24})$$

si ottiene

$$|\chi_I(t)\rangle = V(t, t_0)|\chi_I(t_0)\rangle \quad (\text{E25})$$

simile alla (728) dello studio (a).

Ora deriviamo la (E24) rispetto a t :

$$i\hbar \frac{\partial V}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial U_I}{\partial t} T_S U_I^\dagger + i\hbar U_I \frac{\partial T_S}{\partial t} U_I^\dagger$$

Tenendo presenti la (E21) e la (735) dello studio (a) che qui riscriviamo

$$\frac{\partial T_S}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_S T_S$$

si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial V}{\partial t} = -U_I \mathcal{H}_{S0} T_S U_I^\dagger + U_I \mathcal{H}_S T_S U_I^\dagger = U_I (\mathcal{H}_S - \mathcal{H}_{S0}) T_S U_I^\dagger$$

Ricordando la (E19) si ha:

$$i\hbar \frac{\partial V}{\partial t} = U_I \mathcal{H}_{S_{int}} T_S U_I^\dagger = U_I \mathcal{H}_{S_{int}} U_I^\dagger U_I T_S U_I^\dagger$$

e infine, per le (E22) ed (E24)

$$i\hbar \frac{\partial V(t, t_0)}{\partial t} = \mathcal{H}_{I_{int}} V(t, t_0) \quad (\text{E26})$$

simile alla (735) dello studio (a).

* * *

Osserviamo che, se \mathcal{H}_{S0} non dipende esplicitamente dal tempo, dalla prima delle (E21) si ricava

$$U_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S0}} \quad (\text{E27})$$

cosicché la (E24) può essere riscritta così:

$$V(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S0}} T_S(t, t_0) e^{-\frac{i}{\hbar} t_0 \mathcal{H}_{S0}} \quad (\text{E28})$$

* * *

Nella descrizione di interazione, come si è detto, anche gli operatori A_I evolvono nel tempo e la loro “equazione del moto” è simile alla corrispondente equazione nella descrizione di Heisenberg. Per dimostrarlo deriviamo rispetto al tempo l’espressione (in accordo con la (E2))

$$A_I(t) = U_I(t) A_S(0) U_I^\dagger(t) \quad (\text{E29})$$

dove A_S è il corrispondente di A_I nella descrizione di Schrödinger, ottenendo

$$\frac{dA_I}{dt} = \frac{dU_I}{dt} A_S U_I^\dagger + U_I \frac{dA_S}{dt} U_I^\dagger + U_I A_S \frac{dU_I^\dagger}{dt} = \frac{dU_I}{dt} A_S U_I^\dagger + U_I A_S \frac{dU_I^\dagger}{dt}$$

e infine, tenendo conto delle (E21)

$$\frac{dA_I}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [U_I A_S U_I^\dagger, U_I \mathcal{H}_{S0} U_I^\dagger] + \frac{\partial A_I}{\partial t}$$

Ora poniamo

$$\mathcal{H}_{I0} = U_I \mathcal{H}_{S0} U_I^\dagger \quad (\text{E30})$$

cosicché

$$\frac{dA_I}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A_I, \mathcal{H}_{I0}] + \frac{\partial A_I}{\partial t} \quad (\text{E31})$$

Notiamo che la (E31) è formalmente uguale alla corrispondente equazione nella descrizione di Heisenberg, ma in essa compare solo la parte \mathcal{H}_{I0} della hamiltoniana totale. Quindi A_I evolve nel tempo come se l'interazione non esistesse.

Se \mathcal{H}_{S0} non dipende esplicitamente dal tempo si ha (v. eq. (744) dello studio (a)):

$$\mathcal{H}_{I0} = e^{\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S0}} \mathcal{H}_{S0} e^{-\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S0}} = \mathcal{H}_{S0} \quad (\text{E32})$$

* * *

Abbiamo finora messo in relazione la descrizione di interazione con la descrizione di Schrödinger, ma è ovviamente possibile metterla in relazione anche con la descrizione di Heisenberg.

Consideriamo la (E11):

$$|\chi_S(t)\rangle = U_S(t, \bar{t}) |\chi_H(\bar{t})\rangle$$

e moltiplichiamola per $U_I(t)$

$$U_I(t) |\chi_S(t)\rangle = U_I(t) U_S(t, \bar{t}) |\chi_H(\bar{t})\rangle$$

da cui, per la (E17):

$$|\chi_I(t)\rangle = U_I(t) U_S(t, \bar{t}) |\chi_H(\bar{t})\rangle \quad (\text{E33})$$

La (E33) esprime la relazione fra il vettore $|\chi_I(t)\rangle$ (dipendente dal tempo) e il vettore $|\chi_H(\bar{t})\rangle$ (non dipendente dal tempo) che ci eravamo proposti di determinare.

Se assumiamo $|\chi_H(\bar{t})\rangle \equiv |\chi_I(t_0)\rangle$, allora la (E33) diviene

$$|\chi_I(t)\rangle = U_I(t) U_S(t, t_0) |\chi_I(t_0)\rangle \quad (\text{E34})$$

Abbiamo così ottenuto una equazione descrittiva della evoluzione di $|\chi_I\rangle$ e ci aspettiamo perciò che essa coincida con la (E25), cioè ci aspettiamo che risulti

$$V(t, t_0) = U_I(t) U_S(t, t_0) \quad (\text{E35})$$

cosicché, in accordo con la (E26), dovrà essere

$$i\hbar \frac{\partial U_I U_S}{\partial t} = \mathcal{H}_{I \text{int}} U_I U_S$$

Verifichiamo che è proprio così. Effettuiamo la derivazione rispetto al tempo di $U_I U_S$ e moltiplichiamo per $i\hbar$:

$$i\hbar \frac{\partial U_I U_S}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial U_I}{\partial t} U_S + i\hbar U_I \frac{\partial U_S}{\partial t}$$

Ricordando la (E9) si può scrivere

$$i\hbar \frac{\partial U_I U_S}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial U_I}{\partial t} U_S + U_I U_S \mathcal{H}_H$$

Ricordando la (E21):

$$i\hbar \frac{\partial U_I U_S}{\partial t} = -U_I \mathcal{H}_{S_0} U_S + U_I U_S \mathcal{H}_H = -U_I \mathcal{H}_{S_0} U_S + U_I U_S \mathcal{H}_H U_S^\dagger U_S$$

Ricordando la (E6):

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial U_I U_S}{\partial t} &= -U_I \mathcal{H}_{S_0} U_S + U_I \mathcal{H}_S U_S \\ &= U_I (\mathcal{H}_S - \mathcal{H}_{S_0}) U_S \\ &= U_I (\mathcal{H}_S - \mathcal{H}_{S_0}) U_I^\dagger U_I U_S \end{aligned}$$

e infine, per la (E19) e la (E22):

$$i\hbar \frac{\partial U_I U_S}{\partial t} = \mathcal{H}_{I_{int}} U_I U_S \quad (\text{E36})$$

che è coincidente con la (E26), come ci aspettavamo che dovesse succedere.

Per ciò che riguarda l'operatore A_I , sostituendo nella (E29) la (E6) calcolata per $\bar{t} = 0$, si ottiene:

$$A_I(t) = U_I(t) U_S(t, 0) A_H(t) U_S^\dagger(t, 0) U_I^\dagger(t)$$

e per la (E35):

$$A_I(t) = V(t, 0) A_H(t) V^\dagger(t, 0) \quad (\text{E37})$$

Se \mathcal{H}_{S_0} non dipende esplicitamente dal tempo si ha dalla (E10):

$$U_S(t, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{H_0}} = e^{-\frac{i}{\hbar} t \mathcal{H}_{S_0}}$$

e allora

$$A_I(t) = A_H(t) \quad (\text{E38})$$

cioè l'operatore nella descrizione di interazione coincide con l'operatore nella descrizione di Heisenberg.

* * *

Riassumendo si ha in definitiva:

- Descrizione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\chi_S(t)\rangle}{\partial t} = \mathcal{H}_S |\chi_S(t)\rangle \quad ; \quad \frac{dA_S}{dt} = 0$$

- Descrizione di interazione

$$i\hbar \frac{\partial |\chi_I(t)\rangle}{\partial t} = \mathcal{H}_{I_{int}}(t) |\chi_I(t)\rangle \quad ; \quad i\hbar \frac{dA_I}{dt} = [A_I, \mathcal{H}_{I_0}]$$

- Descrizione di Heisenberg

$$i\hbar \frac{\partial |\chi_H\rangle}{\partial t} = 0 \quad ; \quad i\hbar \frac{dA_H}{dt} = [A_H, \mathcal{H}_H]$$

* * *

Le trasformazioni unitarie (v. l'Appendice A dello studio "L'equazione di Dirac") svolgono in meccanica quantistica un ruolo analogo a quello delle trasformazioni canoniche in meccanica di Hamilton (v. l'Appendice L dello studio (a)).

Infatti, così come l'equazione fondamentale della meccanica di Hamilton-Jacobi è nella generatrice di una trasformazione canonica che rende indipendenti dal tempo le variabili canoniche della meccanica di Hamilton-Poisson (v. l'Appendice M dello studio (a)), allo stesso modo l'equazione fondamentale della meccanica di Schrödinger è espressa dalla applicazione a un vettore di un operatore (indicato con T_S nella (A2) dell'Appendice A dello studio (b)) che coincide (v. eq. (E11)) col generatore di una trasformazione unitaria (indicato con U_S nella (E6)) che rende indipendenti dal tempo gli operatori associati alle variabili della meccanica di Heisenberg.

Come altro esempio della corrispondenza fra trasformazioni unitarie e trasformazioni canoniche ricordiamo che in meccanica di Hamilton le parentesi di Poisson $\{ , \}$ sono invarianti per una trasformazione canonica. Dovremmo perciò aspettarci che il commutatore $[,]$ associato alle parentesi in virtù della $\{ , \} \iff \frac{1}{i\hbar}[,]$ sia invariante per una trasformazione unitaria. Verifichiamo che è proprio così.

Dato, ad esempio, il commutatore

$$[x^i, p_j] = i\hbar\delta^i_j$$

se operiamo su x^i e p_j una trasformazione unitaria

$$[x^{i'}, p'_j] = Ux^iU^{-1}Up_jU^{-1} - Up_jU^{-1}Ux^iU^{-1}$$

otteniamo

$$[x^{i'}, p'_j] = U(x^ip_j - p_jx^i)U^{-1} = U[x^i, p_j]U^{-1} = Ui\hbar\delta^i_jU^{-1}$$

e quindi è ancora

$$[x^{i'}, p'_j] = i\hbar\delta^i_j$$

* * *

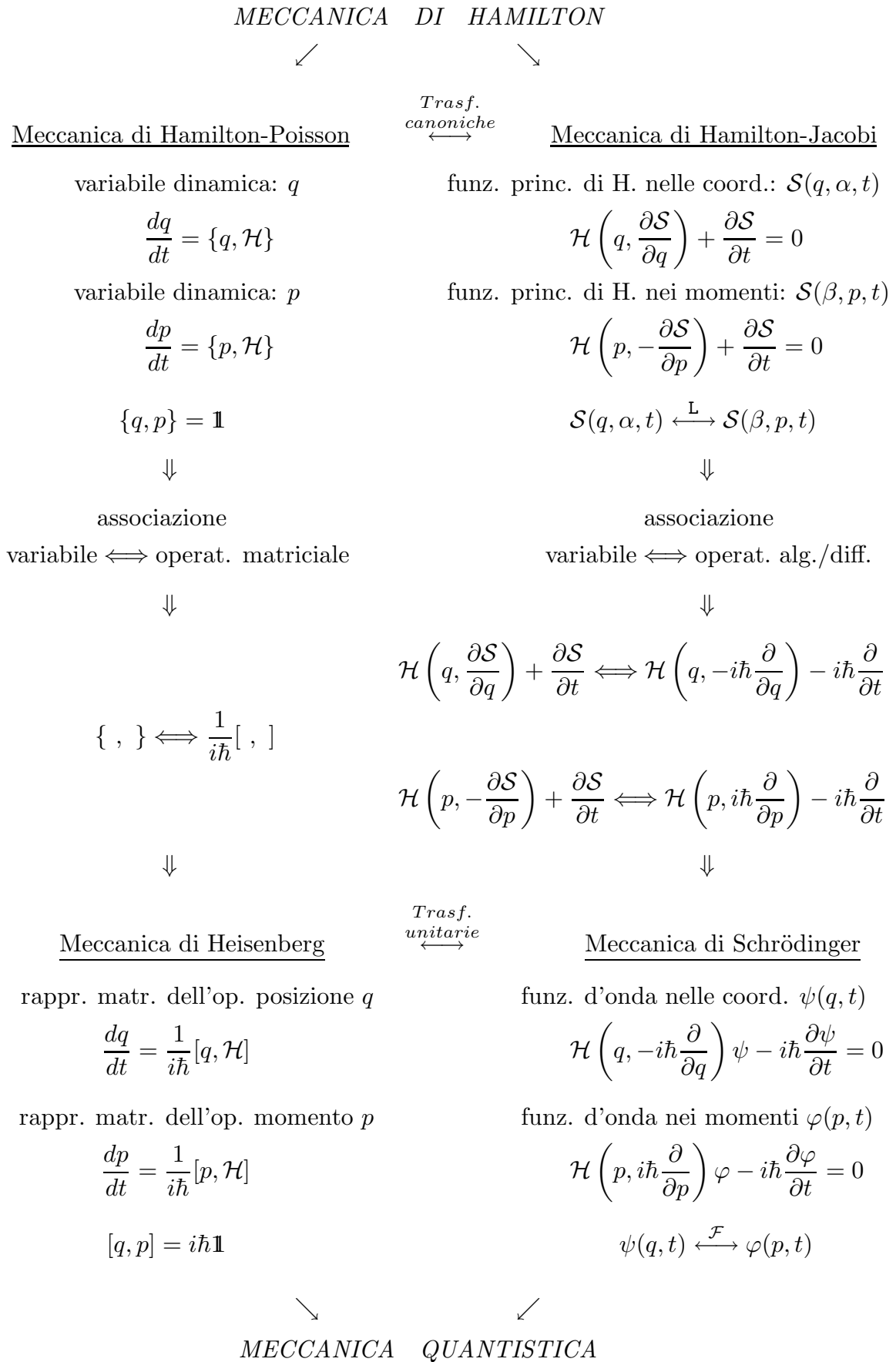
L'insieme delle analogie fra Meccanica di Hamilton-Poisson/Meccanica di Hamilton-Jacobi (Meccaniche classiche) e Meccanica di Heisenberg/Meccanica di Schrödinger (Meccaniche quantistiche) è riassunto nella Tab. 1 seguente che può essere letta sia orizzontalmente che verticalmente.

Orizzontalmente la tabella mette in evidenza corrispondenze in un medesimo ambito (classico o quantistico) e le trasformazioni che permettono di passare da una Meccanica di un tipo a una di un altro tipo. Si tratta delle trasformazioni canoniche per l'ambito classico e delle trasformazioni unitarie per l'ambito quantistico.

Verticalmente viene indicato come si può passare da due Meccaniche classiche a due Meccaniche quantistiche (o viceversa) basandosi su associazioni specifiche di ogni Meccanica.

Simboli presenti nella Tab. 1.

- $\mathbb{1}$ = matrice unità
- la scrittura $\mathcal{S}(q, \alpha, t) \xleftarrow{L} \mathcal{S}(\beta, p, t)$ indica una trasformazione di Legendre (v. l'Appendice K dello studio (a)), e la scrittura $\psi(q, t) \xleftarrow{F} \varphi(p, t)$ indica una trasformazione di Fourier (v. l'Appendice N dello studio (a)).



Tab. 1

Notiamo che nella Tab. 1 non si fa menzione esplicita del Principio di Indeterminazione. Esso è però una conseguenza della relazione $[q, p] = i\hbar\mathbb{1}$ per ciò che riguarda la Meccanica di Heisenberg (v. il primo degli esempi dell'Appendice D) e della $\psi(q, t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \varphi(p, t)$ per ciò che riguarda la Meccanica di Schrödinger (v. l' eq. (661) dello studio (a)).