Enrico Borghi

COMMUTATORI COVARIANTI

Richiami a studi presenti in "fisicarivisitata"

Leggendo "Commutatori covarianti" si incontrano richiami ai seguenti studi

(a) Introduzione alla quantizzazione dei campi
(b) Quantizzazione del campo scalare hermitiano
(c) Quantizzazione del campo di Klein-Gordon

che fanno parte di "fisicarivisitata" e che devono essere ben noti a chi si interessa ai commutatori covarianti seguendo la presentazione che di questo argomento viene data in questo studio.

A) INTRODUZIONE

Negli studi dedicati alla quantizzazione dei campi che abbiamo finora considerato in "fisicarivisitata" le regole di commutazione/anticommutazione per operatori di campo sono state definite in un unico istante di tempo e perciò non sono relativisticamente covarianti. Ci proponiamo ora di ridefinirle in modo da ottenere per i relativi commutatori una presentazione covariante.

Premettiamo una digressione nella quale riprendiamo il problema della determinazione delle regole di commutazione per operatori di campo considerati a tempi uguali, problema che è già affrontato (nello studio "Seconda quantizzazione") e che ora riprendiamo in esame per presentarlo più in dettaglio.
Scegliamo, ad esempio, il campo di Klein-Gordon che, come sappiamo, è scalare e non hermitiano.
Riprendiamo dall'eq. (42) dello studio "L'equazione di Klein-Gordon" l'espressione della lagrangiana alla quale faremo riferimento:

$$\begin{aligned} \mathsf{L}\left(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}^*, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^*}{\partial x^\alpha}\right) &= -\frac{1}{m_0 c} i\hbar \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^*}{\partial x^\alpha} i\hbar \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_\alpha} - m_0 c \boldsymbol{\psi}^* \boldsymbol{\psi} \\ &= -\frac{1}{m_0 c} i\hbar \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^*}{\partial x^\alpha} i\hbar g^{\alpha\beta} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x^\beta} - m_0 c \boldsymbol{\psi}^* \boldsymbol{\psi} \end{aligned} \tag{1}$$

con $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$.
Le coordinate lagrangiane sono $\boldsymbol{\psi}$ e $\boldsymbol{\psi}^*$ sono espresse in versione discretizzata dalle (4) dello studio (c)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}(\overline{\mathsf{R}}) &= \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}} \left\{ a(\overline{k}) e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + b^*(\overline{k}) e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} \\ \boldsymbol{\psi}^*(\overline{\mathsf{R}}) &= \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}} \left\{ a^*(\overline{k}) e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + b(\overline{k}) e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} \end{aligned} \tag{2}$$

essendo V è il volume di una scatola con spigolo avente lunghezza L ed essendo

$$\overline{\mathsf{R}} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \pm\overline{\mathcal{R}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \overline{\mathsf{k}} \equiv \begin{pmatrix} \mathsf{k}_0 \\ \pm\overline{k} \end{pmatrix}$$

$$\overline{k} \equiv k_1, k_2, k_3 \quad ; \quad k_l = \frac{2\pi m_l}{L} \quad ; \quad m_l = 0, 1, 2, 3 \dots \tag{3}$$

$$\mathsf{k}_0 = \frac{\omega_k}{c} \quad ; \quad \omega_k = c\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}} \tag{4}$$

$$a(\overline{k}) \equiv a\big(k_1(m_1), k_2(m_2), k_3(m_3)\big) \quad ; \quad \sum_k \equiv \sum_{k_1, k_2, k_3} \tag{5}$$

$$\overline{\mathsf{k}} \cdot \overline{\mathsf{R}} \equiv \frac{\omega_k}{c} ct - \overline{k} \cdot \overline{\mathcal{R}} \quad ; \quad \overline{k} \cdot \overline{\mathcal{R}} \equiv k_l \mathcal{R}^l \quad ; \quad l = 1, 2, 3$$

I momenti coniugati sono espressi da

$$\pi = \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial ct}\right)} = -\frac{1}{m_0 c} i\hbar \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^*}{\partial ct} i\hbar = \frac{\hbar^2}{m_0 c}\sqrt{\frac{1}{V}}\sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}} i\frac{\omega_k}{c}\left\{a^*(\overline{k})e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} - b(\overline{k})e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\right\}$$

$$\pi^* = \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}^*}{\partial ct}\right)} = -\frac{1}{m_0 c} i\hbar i\hbar \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial ct} = \frac{\hbar^2}{m_0 c}\sqrt{\frac{1}{V}}\sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}}(-i)\frac{\omega_k}{c}\left\{a(\overline{k})e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} - b^*(\overline{k})e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\right\}$$

Seconda quantizzazione:

$$\boldsymbol{\psi} \to \hat{\boldsymbol{\psi}} \quad ; \quad \boldsymbol{\psi}^* \to \hat{\boldsymbol{\psi}}^\dagger \quad ; \quad \pi \to \hat{\pi} \quad ; \quad \pi^* \to \hat{\pi}^\dagger \tag{6}$$

cosicché

$$a(\overline{k}) \to \hat{a}(\overline{k}) \quad ; \quad a^*(\overline{k}) \to \hat{a}^\dagger(\overline{k}) \quad ; \quad b(\overline{k}) \to \hat{b}(\overline{k}) \quad ; \quad b^*(\overline{k}) \to \hat{b}^\dagger(\overline{k}) \tag{7}$$

L'indicazione di operatore ($\hat{}$) verrà d'ora in poi omessa per semplicità di scrittura.
Si ha così:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}(\mathsf{R}) &= \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}}\left\{a(\overline{k})e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + b^\dagger(\overline{k})e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\right\} \\
\boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathsf{R}) &= \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}}\left\{a^\dagger(\overline{k})e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + b(\overline{k})e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\right\}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{\hbar^2}{m_0 c}\sqrt{\frac{1}{V}}\sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}} i\frac{\omega_k}{c}\left\{a^\dagger(\overline{k})e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} - b(\overline{k})e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\right\} \\
\pi^\dagger &= \frac{\hbar^2}{m_0 c}\sqrt{\frac{1}{V}}\sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}}(-i)\frac{\omega_k}{c}\left\{a(\overline{k})e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} - b^\dagger(\overline{k})e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\right\}
\end{aligned} \tag{9}$$

Regola di commutazione per operatori di campo considerati a tempi uguali:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathcal{R}}, t), \pi(\overline{\mathcal{R}}', t)] &= \boldsymbol{\psi}(\overline{\mathcal{R}}, t)\pi(\overline{\mathcal{R}}', t) - \pi(\overline{\mathcal{R}}', t)\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathcal{R}}, t) \\
&= \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}}\left\{a(\overline{k})e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + b^\dagger(\overline{k})e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\right\}\cdot \\
&\qquad \cdot \frac{\hbar^2}{m_0 c}\sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{k'} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_{k'}}} i\frac{\omega_{k'}}{c}\left\{a^\dagger(\overline{k}')e^{i\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}'} - b(\overline{k}')e^{-i\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}'}\right\} + \\
&\quad - \frac{\hbar^2}{m_0 c}\sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{k'} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_{k'}}} i\frac{\omega_{k'}}{c}\left\{a^\dagger(\overline{k}')e^{i\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}'} - b(\overline{k}')e^{-i\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}'}\right\}\cdot \\
&\qquad \cdot \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}}\left\{a(\overline{k})e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + b^\dagger(\overline{k})e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\right\}
\end{aligned}$$

da cui

$$[\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathcal{R}},t),\pi(\overline{\mathcal{R}}',t)]=$$

$$=\frac{1}{V}\frac{\hbar^2}{m_0c}\frac{m_0c^2}{\hbar}\Bigg\{\sum_{k,k'}\frac{1}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\Big(a(\overline{k})i\frac{\omega_{k'}}{c}a^\dagger(\overline{k}')e^{-i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}')}-a(\overline{k})i\frac{\omega_{k'}}{c}b(\overline{k}')e^{-i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}+\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}')}+$$

$$+b^\dagger(\overline{k})i\frac{\omega_{k'}}{c}a^\dagger(\overline{k}')e^{i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}+\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}')}-b^\dagger(\overline{k})b(\overline{k}')i\frac{\omega_{k'}}{c}e^{i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}')}+$$

$$-i\frac{\omega_{k'}}{c}a^\dagger(\overline{k}')a(\overline{k})e^{i(\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}'-\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}})}-i\frac{\omega_{k'}}{c}a^\dagger(\overline{k}')b^\dagger(\overline{k})e^{i(\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}'+\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}})}+$$

$$+i\frac{\omega_{k'}}{c}b(\overline{k}')a(\overline{k})e^{-i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}'+\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}})}+i\frac{\omega_{k'}}{c}b(\overline{k}')b^\dagger(\overline{k})e^{i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{k}}'\overline{\mathsf{R}}')}\Big)\Bigg\}$$

ovvero

$$[\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathcal{R}},t),\pi(\overline{\mathcal{R}}',t)]=$$

$$=\frac{\hbar c}{V}\Bigg\{\sum_{k,k'}\frac{i\omega_{k'}}{2c\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\Big([a(\overline{k}),a^\dagger(\overline{k}')]e^{-i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}')}-[a(\overline{k}),b(\overline{k}')]e^{-i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}+\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}')}+$$

$$+[b^\dagger(\overline{k}),a^\dagger(\overline{k}')]e^{i(\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}'+\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}})}+[b(\overline{k}'),b^\dagger(\overline{k})]e^{i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}')}\Big)\Bigg\}$$

Dalle (11) e (12) dello studio (c) riportiamo le seguenti regole di commutazione

$$\begin{aligned}&[a(\overline{k}),a^\dagger(\overline{k}')]=\delta_{kk'}\\&[a(\overline{k}),b(\overline{k}')]=0\\&[b^\dagger(\overline{k}),a^\dagger(\overline{k})]=0\\&[b(\overline{k}'),b^\dagger(\overline{k})]=\delta_{kk'}\end{aligned}\tag{10}$$

cosicché

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathcal{R}},t),\pi(\overline{\mathcal{R}}',t)]&=\frac{\hbar c}{V}\Bigg\{\sum_{k,k'}\frac{i\omega_{k'}}{2c\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\Big(\delta_{kk'}e^{-i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}')}+\delta_{kk'}e^{i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}')}\Big)\Bigg\}\\&=i\hbar\frac{1}{2}\frac{1}{V}\sum_k\Big(e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{R}}')}+e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{R}}')}\Big)\end{aligned}$$

Passando a valori continui di $\overline{k}$ si ottiene

$$[\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathcal{R}},t),\pi(\overline{\mathcal{R}}',t)]=i\hbar\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\left\{\int e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{R}}')}d\overline{k}+\int e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{R}}')}d\overline{k}\right\}$$

Ma $e^{\mp i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{R}}')}=e^{\mp i\left(\mathsf{k}_0(ct-ct')-\overline{k}\cdot(\overline{\mathcal{R}}-\overline{\mathcal{R}}')\right)}$ e, poiché stiamo considerando regole di commutazione a tempi uguali, bisogna porre $t'=t$ cosicché $e^{\mp i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{R}}')}=e^{\mp i\left(\mathsf{k}_0(ct-ct)-\overline{k}\cdot(\overline{\mathcal{R}}-\overline{\mathcal{R}}')\right)}=e^{\pm i\overline{k}\cdot(\overline{\mathcal{R}}-\overline{\mathcal{R}}')}$ perciò

$$[\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathcal{R}},t),\pi(\overline{\mathcal{R}}',t)]=i\hbar\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\left\{\int e^{i\overline{k}\cdot(\overline{\mathcal{R}}-\overline{\mathcal{R}}')}d\overline{k}+\int e^{-i\overline{k}\cdot(\overline{\mathcal{R}}-\overline{\mathcal{R}}')}d\overline{k}\right\}$$

e infine, ricordando la nota proprietà della funzione δ di Dirac espressa da (v., ad esempio, la pag. 6 dello studio (b))

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{\pm i\overline{k}\cdot(\overline{\mathcal{R}}-\overline{\mathcal{R}}')}d\overline{k} = \delta(\overline{\mathcal{R}}-\overline{\mathcal{R}}')$$

si ottiene

$$[\boldsymbol{\psi}\,(\overline{\mathcal{R}},t),\pi(\overline{\mathcal{R}}',t)] = i\hbar\delta(\overline{\mathcal{R}}-\overline{\mathcal{R}}') \tag{11}$$

Con ragionamenti analoghi si trova

$$[\boldsymbol{\psi}^\dagger\,(\overline{\mathcal{R}},t),\pi^\dagger(\overline{\mathcal{R}}',t)] = i\hbar\delta(\overline{\mathcal{R}}-\overline{\mathcal{R}}') \tag{12}$$

Abbiamo così ottenuto regole di commutazione per operatori di campo considerati a tempi uguali che, essendo espresse in funzione degli operatori $\boldsymbol{\psi}$ e π, ricordano quelle che si incontrano in Meccanica di Schrödinger:

$$[x_k,p_l] = i\hbar\delta_{kl}$$

Tali regole possono, tuttavia, essere definite anche in un altro modo, come risulta dallo studio “Seconda quantizzazione” dove sono state considerate le seguenti

$$[\boldsymbol{\psi}\,(\overline{\mathcal{R}},t),\boldsymbol{\psi}^\dagger(\overline{\mathcal{R}}',t)] = \delta(\overline{\mathcal{R}}-\overline{\mathcal{R}}') \tag{13}$$

$$[\boldsymbol{\psi}\,(\overline{\mathcal{R}},t),\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathcal{R}}',t)] = 0 \quad ; \quad [\boldsymbol{\psi}^\dagger\,(\overline{\mathcal{R}},t),\boldsymbol{\psi}^\dagger(\overline{\mathcal{R}}',t)] = 0 \tag{14}$$

ricavate per analogia dalle (59) e (60) del medesimo studio.
Poiché non esiste un criterio per stabilire quali devono essere le regole da adottare, la scelta dell'uno o dell'altro modo può essere fatta in base alla comodità e semplicità d'uso.
In “fisicarivisitata” sono state scelte le regole (13) e (14) ed è quindi su queste che verrà impostato il presente studio che le trasformerà in regole di commutazione covarianti.
Fine della digressione.

A partire da questo punto ci interesseremo a ridefinire le regole di commutazione degli operatori di campo abbandonando il vincolo dei tempi uguali.

B) CAMPO SCALARE HERMITIANO

Indichiamo con $\psi(\overline{\mathsf{R}})$ l'operatore di campo e calcoliamo il commutatore $[\psi(\overline{\mathsf{R}}),\psi(\overline{\mathsf{R}}')]$. Tenendo presente la (20) dello studio (a), cioè: $\psi(\overline{\mathsf{R}}) = \psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}})+\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}})$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
[\psi(\overline{\mathsf{R}}),\psi(\overline{\mathsf{R}}')] &= [\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}})+\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}),\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}')+\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}')] \\
&= \left(\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}})+\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}})\right)\left(\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}')+\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}')\right)+ \\
&\qquad -\left(\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}')+\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}')\right)\left(\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}})+\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}})\right) \\
&= [\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}),\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}')]+[\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}),\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}')]+ \\
&\qquad +[\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}),\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}')]+[\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}),\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}')]
\end{aligned}$$

Consideriamo il primo termine a membro destro. Ricaviamo le espressioni di $\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}})$ e $\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}})$ dall'eq. (7) dello studio (b) che qui riscriviamo

$$\psi(\overline{\mathsf{R}}) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}} \left\{ a(\overline{k}) e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + a^\dagger(\overline{k}) e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} \tag{15}$$

$$\psi^{(+)} = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}} a(\overline{k}) e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \quad ; \quad \psi^{(-)} = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_k \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2\hbar\omega_k}} a^\dagger(\overline{k}) e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \tag{16}$$

Tenendo presente la prima delle (46) dello studio (a) che qui riscriviamo

$$[a(\overline{k}), a(\overline{k}')] = [a^\dagger(\overline{k}), a^\dagger(\overline{k}')] = 0 \tag{17}$$

si vede che questo termine si annulla; con ragionamenti analoghi si vede che anche il secondo termine si annulla, perciò rimane

$$[\psi(\overline{\mathsf{R}}), \psi(\overline{\mathsf{R}}')] = [\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}), \psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}')] + [\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}), \psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}')]$$

cui corrisponde

$$[\psi(\overline{\mathsf{R}}), \psi(\overline{\mathsf{R}}')] = \frac{1}{V} \sum_{k,k'} \frac{m_0 c^2}{2\hbar\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left([a(\overline{k}), a^\dagger(\overline{k}')] e^{-i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}')} + [a^\dagger(\overline{k}), a(\overline{k}')] e^{i(\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}')} \right) \tag{18}$$

La (18), tenendo conto della (45) dello studio (a) che qui riscriviamo

$$[a(\overline{k}), a^\dagger(\overline{k}')] = \delta_{kk'}$$

e omettendo costanti inessenziali, diviene:

$$[\psi(\overline{\mathsf{R}}), \psi(\overline{\mathsf{R}}')] = \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega_k} \left(e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}')} - e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}')} \right)$$

Passiamo a variabili continue:

$$[\psi(\overline{\mathsf{R}}), \psi(\overline{\mathsf{R}}')] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}')} - e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}')}}{2\omega(\overline{k})} d\overline{k} \tag{19}$$

con

$$\omega(\overline{k}) = c\sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + \overline{k}^2} \tag{20}$$

e introduciamo la *funzione di commutazione di Pauli-Jordan*

$$\triangle(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}')} - e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}')}}{2\omega(\overline{k})} d\overline{k} = -\triangle(\overline{\mathsf{R}}' - \overline{\mathsf{R}}) \tag{21}$$

cosicché la (19) diviene

$$[\psi(\overline{\mathsf{R}}), \psi(\overline{\mathsf{R}}')] = -i\triangle(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') \tag{22}$$

Questa è la relazione di commutazione covariante del campo scalare hermitiano $\psi(\overline{\mathsf{R}})$.

* * *

In $\triangle$ individuiamo la parte a frequenza positiva

$$\triangle^{(+)}(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{R}}')}}{2\omega(\overline{k})} d\overline{k} = i[\psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}), \psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}')] \tag{23}$$

e la parte a frequenza negativa

$$\triangle^{(-)}(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{R}}')}}{2\omega(\overline{k})} d\overline{k} = i[\psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}), \psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}')] \tag{24}$$

cosicché

$$\triangle(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') = \triangle^{(+)}(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') + \triangle^{(-)}(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') \tag{25}$$

Si noti che

$$\triangle^{(+)}(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') = -\triangle^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}' - \overline{\mathsf{R}}) \tag{26}$$

La funzione di commutazione di Pauli-Jordan è relativisticamente invariante. Ciò può essere messo in evidenza scrivendola nel modo seguente (v. ad esempio, “Greiner-Reinhardt - Field quantization”, sez. 4.6):

$$\triangle(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') = \frac{1}{i(2\pi)^3}\int e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{R}}')}\delta\left(\overline{\mathsf{k}}^2 - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\varepsilon(\mathsf{k}_0)d\overline{\mathsf{k}} \tag{27}$$

e

$$\varepsilon(\mathsf{k}_0) = \begin{cases} +1 \; se \; \overline{\mathsf{k}}_0 > 0 \\ -1 \; se \; \overline{\mathsf{k}}_0 < 0 \end{cases}$$

C) CAMPO DI KLEIN-GORDON

Indichiamo con $\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathsf{R}})$ e $\boldsymbol{\psi}^\dagger(\overline{\mathsf{R}})$ gli operatori di campo e proponiamoci di calcolare il commutatore $[\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathsf{R}}), \boldsymbol{\psi}^\dagger(\overline{\mathsf{R}}')]$. Seguendo un procedimento simile a quello adottato per il campo scalare hermitiano si ottiene in corrispondenza della (1) la seguente espressione:

$$[\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathsf{R}}), \boldsymbol{\psi}^\dagger(\overline{\mathsf{R}}')] = [\boldsymbol{\psi}^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}), \boldsymbol{\psi}^{\dagger(-)}(\overline{\mathsf{R}}')] + [\boldsymbol{\psi}^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}), \boldsymbol{\psi}^{\dagger(+)}(\overline{\mathsf{R}}')] \tag{28}$$

e in corrispondenza della (18) (omettendo di scrivere costanti inessenziali)

$$[\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathsf{R}}), \boldsymbol{\psi}^\dagger(\overline{\mathsf{R}}')] = \frac{1}{V}\sum_{k,k'} \frac{1}{2\sqrt{\omega(\overline{k})\omega(\overline{k}')}} \left([a(\overline{k}), a^\dagger(\overline{k}')]e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{R}}')} + [b^\dagger(\overline{k}), b(\overline{k}')]e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot(\overline{\mathsf{R}}-\overline{\mathsf{R}}')}\right)$$

In corrispondenza della (22) si ha la relazione di commutazione del campo scalare non hermitiano:

$$[\boldsymbol{\psi}(\overline{\mathsf{R}}), \boldsymbol{\psi} \dagger (\overline{\mathsf{R}}')] = [\boldsymbol{\psi}^\dagger(\overline{\mathsf{R}}), \boldsymbol{\psi}(\overline{\mathsf{R}}')] = -i\triangle(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') \tag{29}$$

Si ha anche

$$\triangle^{(+)}(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') = i[\boldsymbol{\psi}^{\dagger(-)}(\overline{\mathsf{R}}), \boldsymbol{\psi}^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}')] \tag{30}$$

$$\triangle^{(-)}(\overline{\mathsf{R}} - \overline{\mathsf{R}}') = i[\boldsymbol{\psi}^{\dagger(+)}(\overline{\mathsf{R}}), \boldsymbol{\psi}^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}')] \tag{31}$$