Enrico Borghi

QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO DI DIRAC

Richiami a studi presenti in "fisicarivisitata"

Leggendo la "Quantizzazione del campo di Dirac" si incontrano richiami ai seguenti studi

(a) L'equazione di Dirac
(b) Le variabili dinamiche del campo di Dirac
(c) Introduzione alla quantizzazione dei campi

che fanno parte di "fisicarivisitata" e che devono essere ben noti a chi si interessa alla quantizzazione del campo di Dirac seguendo la presentazione che di questo argomento viene data in questo studio.

Riprendiamo le equazioni (262) e (270) dello studio (a) rappresentative del bispinore $\Psi(\overline{\mathsf{R}})$, funzione d'onda dell'elettrone libero, e del bispinore coniugato di Dirac $\overline{\Psi}(\overline{\mathsf{R}})$, oggetti matematici a 4 componenti che ora consideriamo come le coordinate lagrangiane del campo di Dirac (indici bispinoriali omessi per semplicità), e riscriviamole nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\Psi(\overline{\mathsf{R}}) &= \sum_r \frac{1}{\hbar^{3/2}} \int \sqrt{\frac{c}{2\mathsf{E}(\overline{P})}} \left\{ g_{\mathsf{u}}(\overline{P},r)\mathsf{u}_r(\overline{P})e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + g_{\mathsf{v}}^{\dagger}(\overline{P},r)\mathsf{v}_r(\overline{P})e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} d\overline{P} \\ \overline{\Psi}(\overline{\mathsf{R}}) &= \sum_r \frac{1}{\hbar^{3/2}} \int \sqrt{\frac{c}{2\mathsf{E}(\overline{P})}} \left\{ g_{\mathsf{v}}(\overline{P},r)\overline{\mathsf{v}}_r(\overline{P})e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + g_{\mathsf{u}}^{\dagger}(\overline{P},r)\overline{\mathsf{u}}_r(\overline{P})e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} d\overline{P}\end{aligned} \tag{1}$$

dove

$$\overline{\mathsf{R}} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \pm\overline{\mathcal{R}} \end{pmatrix} \; ; \; \overline{\mathsf{P}} \equiv \begin{pmatrix} \mathsf{P}_0 \\ \pm\overline{P} \end{pmatrix} \; ; \; \overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}} = \mathsf{P}_0 ct - \overline{P}\cdot\overline{\mathcal{R}} \; ; \; \mathsf{P}_0 = \frac{\mathsf{E}(\overline{P})}{c} = \sqrt{\overline{P}^2 + m_0^2c^2} \tag{2}$$

e (v. l'eq. (189) dello studio (a))

$$\overline{\Psi}(\overline{\mathsf{R}}) = \Psi^{\dagger}(\overline{\mathsf{R}})\boldsymbol{\gamma}^0 \quad ; \quad \overline{\mathsf{u}}_r = \mathsf{u}_r^{\dagger}\boldsymbol{\gamma}^0 \quad ; \quad \overline{\mathsf{v}}_r = \mathsf{v}_r^{\dagger}\boldsymbol{\gamma}^0 \tag{3}$$

Nella (1) $\mathsf{u}_r(\overline{P})$ e $\mathsf{v}_r(\overline{P})$ sono bispinori espressi dalle equazioni (253) e (254) dello studio (a) e associati rispettivamente a energia positiva ed energia negativa; r è uno dei due possibili autovalori dell'operatore elicità, che sono (v. il cap. 8 dello studio (a)) $+1$ (spin dell'elettrone parallelo ed equiverso al momento dell'elettrone) e -1 (spin dell'elettrone antiparallelo al momento dell'elettrone).
Normalizziamo le (1) in una scatola avente volume V effettuando la sostituzione

$$da \quad \frac{1}{\hbar^{3/2}} \int \sqrt{\frac{c}{2\mathsf{E}(\overline{P})}} d\overline{P} \quad a \quad \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_P \sqrt{\frac{c}{2\mathsf{E}_P}} \tag{4}$$

cosicché, tenuto conto del fatto che $\overline{P} \equiv P_1, P_2, P_3$ con $P_k = 2\pi\hbar m_k/L$ essendo $m_k = 0, 1, 2, \ldots$ e del fatto che l'indice discreto P sta per m_1, m_2, m_3 (perciò la sommatoria è tripla, una per ogni P_k al variare del numero m_k), segue

$$\Psi(\overline{\mathsf{R}}) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{P,r} \sqrt{\frac{c}{2\mathsf{E}_P}} \left\{ g_{\mathsf{u}}(\overline{P},r)\mathsf{u}_r(\overline{P})e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + g_{\mathsf{v}}^{\dagger}(\overline{P},r)\mathsf{v}_r(\overline{P})e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} \tag{5}$$

$$\overline{\Psi}(\overline{\mathsf{R}}) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{P,r} \sqrt{\frac{c}{2\mathsf{E}_P}} \left\{ g_{\mathsf{v}}(\overline{P},r)\overline{\mathsf{v}}_r(\overline{P})e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + g_{\mathsf{u}}^{\dagger}(\overline{P},r)\overline{\mathsf{u}}_r(\overline{P})e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} \tag{6}$$

Ciò posto, possiamo passare alla procedura di quantizzazione presentata nello studio (c).
Nel punto 5. della procedura vengono definiti gli operatori di campo che, per ciò che riguarda il campo di Dirac, si ricavano dalle coordinate lagrangiane Ψ e $\overline{\Psi}$ espresse dalle

(5) e (6) introducendo gli operatori $a_r(\overline{P})$ e $b_r(\overline{P})$ in luogo rispettivamente di $g_{\mathsf{u}}(\overline{P},r)$ e $g_{\mathsf{v}}(\overline{P},r)$ cosicché, essendo

$$\mathsf{P}_0 = \frac{\mathsf{E}_P}{c} = \frac{\hbar\omega_P}{c} \quad ; \quad \frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}} = \frac{i}{\hbar}\Big(\frac{\hbar\omega_P}{c}ct - \overline{P}\cdot\overline{\mathcal{R}}\Big) = i\omega_P t - \frac{i}{\hbar}\overline{P}\cdot\overline{\mathcal{R}} \tag{7}$$

si ottiene

$$\Psi(\overline{\mathsf{R}}) = \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{P,r}\sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}}\left\{a_r(\overline{P})\mathsf{u}_r(\overline{P})e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + b_r^\dagger(\overline{P})\mathsf{v}_r(\overline{P})e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\right\} \tag{8}$$

$$\overline{\Psi}(\overline{\mathsf{R}}) = \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{P,r}\sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}}\left\{b_r(\overline{P})\overline{\mathsf{v}}_r(\overline{P})e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + a_r^\dagger(\overline{P})\overline{\mathsf{u}}_r(\overline{P})e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\right\} \tag{9}$$

(Notiamo che sono rimasti invariati, per semplicità, i simboli Ψ e $\overline{\Psi}$ che da questo punto in poi indicano operatori funzioni di $a_r(\overline{P})$ e $b_r(\overline{P})$ e non coordinate lagrangiane).
Le parti a frequenza positiva e negativa di $\Psi(\overline{\mathsf{R}})$ sono rispettivamente:

$$\begin{aligned}\Psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}) &= \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{P,r}\sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}}a_r(\overline{P})\mathsf{u}_r(\overline{P})e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\\ \Psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}) &= \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{P,r}\sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}}b_r^\dagger(\overline{P})\mathsf{v}_r(\overline{P})e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\end{aligned} \tag{10}$$

e si ha

$$\Psi(\overline{\mathsf{R}}) = \Psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}) + \Psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}) \tag{11}$$

mentre quelle di $\overline{\Psi}(\overline{\mathsf{R}})$ sono

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}) &= \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{P,r}\sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}}b_r(\overline{P})\overline{\mathsf{v}}_r(\overline{P})e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\\ \overline{\Psi}^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}) &= \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{P,r}\sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}}a_r^\dagger(\overline{P})\overline{\mathsf{u}}_r(\overline{P})e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\end{aligned} \tag{12}$$

e si ha

$$\overline{\Psi}(\overline{\mathsf{R}}) = \overline{\Psi}^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}) + \overline{\Psi}^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}) \tag{13}$$

Inoltre

$$\overline{\Psi}^{(+)} = \overline{\psi^{(-)}} \quad ; \quad \overline{\Psi}^{(-)} = \overline{\Psi^{(+)}} \tag{14}$$

Lo stato del vuoto è definito da

$$a_r(\overline{P})|0\rangle = b_r(\overline{P})|0\rangle = 0 \tag{15}$$

Lo stato del vuoto è espresso anche da

$$\Psi^{(+)}(\overline{\mathsf{R}})|0\rangle = \langle 0|\overline{\Psi}^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}) = 0 \quad ; \quad \overline{\Psi}^{(+)}(\overline{\mathsf{R}})|0\rangle = \langle 0|\Psi^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}) = 0 \tag{16}$$

*   *   *

Passiamo ora agli operatori associati alle variabili dinamiche, per definire i quali ci serviremo del Teorema di Nöther (v. la considerazione a pag. 11 dello studio (c)).
Il quadrivettore energia-momento è espresso dalla (39) dello studio (b) che qui riscriviamo:

$$\mathsf{P}_\beta = \int \overline{\Psi}_a \boldsymbol{\gamma}^{0,a}{}_b i\hbar \frac{\partial \Psi^b}{\partial x^\beta} d\overline{\mathcal{R}} = \int \Psi^\dagger_b i\hbar \frac{\partial \Psi^b}{\partial x^\beta} d\overline{\mathcal{R}} \tag{17}$$

con $\beta = 0, 1, 2, 3$ (indice spaziotemporale) e $a, b = 1, 2, 3, 4$ (indici bispinoriali).
La sua componente temporale si ottiene ponendo $\beta = 0$ (omettiamo, per semplicità, gli indici bispinoriali):

$$\mathsf{P}_0 = \int \overline{\Psi} \boldsymbol{\gamma}^0 i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} d\overline{\mathcal{R}} = \int \Psi^\dagger i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial ct} d\overline{\mathcal{R}} \tag{18}$$

Inserendo in essa le (8) e (9) otteniamo un'espressione operatoriale di P_0 in termini degli operatori $a_r(\overline{P})$ e $b_r(\overline{P})$.
Osserviamo innanzitutto che, tenendo presente la (7), si ha dalla (8)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} = \frac{\partial \Psi}{\partial ct} = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{P,r} \sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}} \frac{-i}{\hbar} \frac{\hbar\omega_P}{c} \left\{ a_r(\overline{P}) \mathsf{u}_r(\overline{P}) e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} - b^\dagger_r(\overline{P}) \mathsf{v}_r(\overline{P}) e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\}$$

perciò, tenendo conto della (9) ed essendo $\overline{\mathsf{P}}' \cdot \overline{\mathsf{R}} = \frac{\hbar\omega_{P'}}{c} ct - \overline{P}' \cdot \overline{\mathcal{R}}$, la (18) diviene

$$\mathsf{P}_0 = \frac{1}{V} \int \sum_{P,P',r,r'} \sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}} \left\{ a^\dagger_r(\overline{P}) \overline{\mathsf{u}}_r(\overline{P}) e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + b_r(\overline{P}) \overline{\mathsf{v}}_r(\overline{P}) e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} \boldsymbol{\gamma}^0 i\hbar \cdot$$
$$\cdot \frac{-i}{\hbar} \frac{\hbar\omega_{P'}}{c} \sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_{P'}}} \left\{ a_{r'}(\overline{P}') \mathsf{u}_{r'}(\overline{P}') e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}} - b^\dagger_{r'}(\overline{P}') \mathsf{v}_{r'}(\overline{P}') e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} d\overline{\mathcal{R}} \tag{19}$$

da cui

$$\mathsf{P}_0 = \frac{1}{2V} \sum_{P,P',r,r'} \frac{c}{\hbar\sqrt{\omega_P \omega_{P'}}} \int \frac{\hbar\omega_{P'}}{c} \left\{ a^\dagger_r(\overline{P}) \overline{\mathsf{u}}_r(\overline{P}) \gamma^0 a_{r'}(\overline{P}') \mathsf{u}_{r'}(\overline{P}') e^{\frac{i}{\hbar}(\overline{\mathsf{P}}-\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} + \right.$$
$$- a^\dagger_r(\overline{P}) \overline{\mathsf{u}}_r(\overline{P}) \gamma^0 b^\dagger_{r'}(\overline{P}') \mathsf{v}_{r'}(\overline{P}') e^{\frac{i}{\hbar}(\overline{\mathsf{P}}+\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} + b_r(\overline{P}) \overline{\mathsf{v}}_r(\overline{P}) \gamma^0 a_{r'}(\overline{P}') \mathsf{u}_{r'}(\overline{P}') e^{-\frac{i}{\hbar}(\overline{\mathsf{P}}+\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} +$$
$$\left. - b_r(\overline{P}) \overline{\mathsf{v}}_r(\overline{P}) \gamma^0 b^\dagger_{r'}(\overline{P}') \mathsf{v}_{r'}(\overline{P}') e^{-\frac{i}{\hbar}(\overline{\mathsf{P}}-\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} d\overline{\mathcal{R}}$$

Poiché dall'eq. (189) dello studio (a) si ricava $\overline{\mathsf{u}}_r(\overline{P})\gamma^0 = \mathsf{u}^\dagger_r(\overline{P})$ e $\overline{\mathsf{v}}_r(\overline{P})\gamma^0 = \mathsf{v}^\dagger_r(\overline{P})$ segue

$$\mathsf{P}_0 = \frac{1}{2V} \sum_{P,P',r,r'} \frac{c}{\hbar\sqrt{\omega_P \omega_{P'}}} \int \frac{\hbar\omega_{P'}}{c} \left\{ a^\dagger_r(\overline{P}) \mathsf{u}^\dagger_r(\overline{P}) a_{r'}(\overline{P}') \mathsf{u}_{r'}(\overline{P}') e^{\frac{i}{\hbar}(\overline{\mathsf{P}}-\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} + \right.$$
$$- a^\dagger_r(\overline{P}) \mathsf{u}^\dagger_r(\overline{P}) b^\dagger_{r'}(\overline{P}') \mathsf{v}_{r'}(\overline{P}') e^{i(\overline{\mathsf{P}}+\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} + b_r(\overline{P}) \mathsf{v}^\dagger_r(\overline{P}) a_{r'}(\overline{P}') \mathsf{u}_{r'}(\overline{P}') e^{-\frac{i}{\hbar}(\overline{\mathsf{P}}+\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} +$$
$$\left. - b_r(\overline{P}) \mathsf{v}^\dagger_r(\overline{P}) b^\dagger_{r'}(\overline{P}') \mathsf{v}_{r'}(\overline{P}') e^{-\frac{i}{\hbar}(\overline{\mathsf{P}}-\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} d\overline{\mathcal{R}} \tag{20}$$

Ora osserviamo che (v. eq. (7))

$$\frac{1}{V}\int e^{\pm\frac{i}{\hbar}(\overline{\mathsf{P}}+\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}}d\overline{\mathcal{R}} = e^{\pm i(\omega_P+\omega_{P'})t}\frac{1}{V}\int e^{\mp\frac{i}{\hbar}(\overline{P}+\overline{P}')\cdot\overline{\mathcal{R}}}d\overline{\mathcal{R}}$$

e anche

$$\frac{1}{V}\int e^{\pm\frac{i}{\hbar}(\overline{\mathsf{P}}-\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}}d\overline{\mathcal{R}} = e^{\pm i(\omega_P-\omega_{P'})t}\frac{1}{V}\int e^{\mp\frac{i}{\hbar}(\overline{P}-\overline{P}')\cdot\overline{\mathcal{R}}}d\overline{\mathcal{R}}$$

perciò, ripetendo il ragionamento basato sulla (11) dello studio “Quantizzazione del campo scalare hermitiano”, si ottiene

$$\frac{1}{V}\int e^{\pm\frac{i}{\hbar}(\overline{\mathsf{P}}+\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}}d\overline{\mathcal{R}} = e^{\pm i(\omega_P+\omega_{P'})t}\delta_{P(-P')} \tag{21}$$

$$\frac{1}{V}\int e^{\pm\frac{i}{\hbar}(\overline{\mathsf{P}}-\overline{\mathsf{P}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}}d\overline{\mathcal{R}} = e^{\pm i(\omega_P-\omega_{P'})t}\delta_{PP'} \tag{22}$$

Inserendo queste espressioni nella (20) e tenendo conto del fatto che u e v sono c-numeri che possono essere collocati a destra o a sinistra degli operatori a_r e b_r si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_0 = \frac{1}{2}\sum_{P,r,r'}\frac{c}{\hbar\omega_P}\frac{\hbar\omega_P}{c}\big\{a_r^\dagger(\overline{P})a_{r'}(\overline{P})\mathsf{u}_r^\dagger(\overline{P})\mathsf{u}_{r'}(\overline{P})+ \\ - a_r^\dagger(\overline{P})b_{r'}^\dagger(-\overline{P})\mathsf{u}_r^\dagger(\overline{P})\mathsf{v}_{r'}(-\overline{P}) + b_r(\overline{P})a_{r'}(-\overline{P})\mathsf{v}_r^\dagger(\overline{P})\mathsf{u}_{r'}(-\overline{P})+ \\ -b_r(\overline{P})b_{r'}^\dagger(\overline{P})\mathsf{v}_r^\dagger(\overline{P})\mathsf{v}_{r'}(\overline{P})\Big\}\end{aligned}$$

ovvero, ricordando che u e v sono fra loro ortogonali perciò $\mathsf{u}_r^\dagger\mathsf{v}_{r'} \equiv \mathsf{u}_r^{\dagger a}\mathsf{v}_{a,r'} = 0$ e $\mathsf{v}_r^\dagger\mathsf{u}_{r'} \equiv \mathsf{v}_r^{\dagger a}\mathsf{u}_{a,r'} = 0$,

$$\mathsf{P}_0 = \frac{1}{2}\sum_{P,r,r'}\Big\{a_r^\dagger(\overline{P})a_{r'}(\overline{P})\mathsf{u}_r^\dagger(\overline{P})\mathsf{u}_{r'}(\overline{P}) - b_r(\overline{P})b_{r'}^\dagger(\overline{P})\mathsf{v}_r^\dagger(\overline{P})\mathsf{v}_{r'}(\overline{P})\Big\} \tag{23}$$

Ora teniamo presenti le condizioni di normalizzazione espresse dalle (277) dello studio (a) che qui riscriviamo adattando opportunamente gli indici ($r, r' = \pm 1$)

$$\sum_{a=1}^{4}\mathsf{u}_r^{\dagger a}(\overline{P})\mathsf{u}_{a,r'}(\overline{P}) = 2\frac{\mathsf{E}}{c}\delta_{rr'} = 2\frac{\hbar\omega_P}{c}\delta_{rr'} \quad ; \quad \sum_{a=1}^{4}\mathsf{v}_r^{\dagger a}(\overline{P})\mathsf{v}_{a,r'}(\overline{P}) = 2\frac{\mathsf{E}}{c}\delta_{rr'} = 2\frac{\hbar\omega_P}{c}\delta_{rr'} \tag{24}$$

Notiamo che in ciascuna compaiono gli indici bispinoriali e, per maggior chiarezza, è esplicitata la sommatoria sull'indice a (non si è fatto uso della convenzione di Einstein). Si ottiene così

$$\mathsf{P}_0 = \frac{1}{2}\sum_{P,r,r'}\frac{2\hbar\omega_P}{c}\Big\{a_r^\dagger(\overline{P})a_{r'}(\overline{P})\delta_{rr'} - b_r(\overline{P})b_{r'}^\dagger(\overline{P})\delta_{rr'}\Big\}$$

ovvero

$$\mathsf{P}_0 = \sum_{P,r}\frac{\hbar\omega_P}{c}\left\{a_r^\dagger(\overline{P})a_r(\overline{P}) - b_r(\overline{P})b_r^\dagger(\overline{P})\right\} \tag{25}$$

Se ora assumiamo che $a(\overline{P})$ e $b(\overline{P})$ obbediscano a *regole di commutazione* del tipo (45) dello studio (c) cioè

$$[a_r(\overline{P}), a_s^\dagger(\overline{P}')] = \delta_{rs}\delta_{pp'} \quad ; \quad [b_r(\overline{P}), b_s^\dagger(\overline{P}')] = \delta_{rs}\delta_{pp'} \tag{26}$$

la (25) diviene

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_0 &= \sum_{P,r} \frac{\hbar\omega_P}{c} \left\{ a_r^\dagger(\overline{P}) a_r(\overline{P}) - b_r(\overline{P}) b_r^\dagger(\overline{P}) \right\} \\
&= \sum_{P,r} \frac{\hbar\omega_P}{c} a_r^\dagger(\overline{P}) a_r(\overline{P}) - \sum_{P,r} \frac{\hbar\omega_P}{c} \left\{ b_r^\dagger(\overline{P}) b_r(\overline{P}) + \delta_{rr}\delta_{pp} \right\} \\
&= \sum_{P,r} \frac{\hbar\omega_P}{c} a_r^\dagger(\overline{P}) a_r(\overline{P}) - \sum_{P,r} \frac{\hbar\omega_P}{c} b_r^\dagger(\overline{P}) b_r(\overline{P}) - \sum_{P;r=\pm 1} \frac{\hbar\omega_P}{c} \delta_{rr} \\
&= \sum_{P,r} \frac{\hbar\omega_P}{c} \left\{ a_r^\dagger(\overline{P}) a_r(\overline{P}) - b_r^\dagger(\overline{P}) b_r(\overline{P}) - 2 \cdot \mathbb{1} \right\}
\end{aligned}$$

In analogia con quanto si è stabilito nell'eq. (47) dello studio (c) indichiamo con

$$N_r^-(\overline{P}) = a_r^\dagger(\overline{P}) a_r(\overline{P}) \quad ; \quad N_r^+(\overline{P}) = b_r^\dagger(\overline{P}) b_r(\overline{P}) \tag{27}$$

gli operatori numero di occupazione rispettivamente degli elettroni aventi carica negativa ("particelle" propriamente dette), e positroni aventi carica positiva ("antiparticelle"). Si ha quindi (v. eq. (11) dello studio (c)):

$$N_r^-(\overline{P}) |n_r^-\rangle = n_r^- |n_r^-\rangle \tag{28}$$

$$N_r^+(\overline{P}) |n_r^+\rangle = n_r^+ |n_r^+\rangle \tag{29}$$

Dalla (27) segue

$$\mathsf{P}_0 = \sum_{P,r} \frac{\hbar\omega_P}{c} \left\{ N_r^-(\overline{P}) - N_r^+(\overline{P}) - 2 \cdot \mathbb{1} \right\} \tag{30}$$

Il valor medio di questa espressione, trascurando il termine divergente di cui ci occuperemo più avanti, è

$$\langle \mathsf{P}_0 \rangle = \frac{\mathsf{E}}{c} = \langle \Psi | \sum_{P,r} \frac{\hbar\omega_P}{c} \left\{ N_r^-(\overline{P}) - N_r^+(\overline{P}) \right\} | \Psi \rangle$$

da cui

$$\mathsf{E} = \sum_{P,r} \hbar\omega_P \left\{ n_r^-(\overline{P}) - n_r^+(\overline{P}) \right\} \tag{31}$$

Esso mostra che l'energia del sistema di elettroni non è definita positiva, ma, a differenza di ciò che succede per il campo di Maxwell, non vi sono condizioni aggiuntive che possano essere imposte per renderla definita positiva.
Per di più si noti che n_r^- e n_r^+ possono essere numeri qualisivoglia, cosicché non si vede come si possa soddisfare il Principio di esclusione di Pauli, che vanta sicure basi sperimentali e che impone che gli unici autovalori di questi due operatori siano 0 e 1.

Ci troviamo in una situazione evidentemente inaccettabile, dalla quale possiamo uscire se assumiamo che $a(\overline{P})$ e $b(\overline{P})$ obbediscano alle seguenti *regole di anticommutazione* (v. il par. 2.2 dello studio "Seconda quantizzazione"):

$$\left\{a_r(\overline{P}), a_s^\dagger(\overline{P}')\right\} = \delta_{rs}\delta_{pp'} \quad ; \quad \left\{b_r(\overline{P}), b_s^\dagger(\overline{P}')\right\} = \delta_{rs}\delta_{pp'} \quad ; \quad r, s = \pm 1 \tag{32}$$

ovvero

$$a_r(\overline{P})a_s^\dagger(\overline{P}') + a_s^\dagger(\overline{P}')a_r(\overline{P}) = \delta_{rs}\delta_{pp'} \quad ; \quad b_r(\overline{P})b_s^\dagger(\overline{P}') + b_s^\dagger(\overline{P}')b_r(\overline{P}) = \delta_{rs}\delta_{pp'}$$

e inoltre

$$\left\{a_r(\overline{P}), b_r(\overline{P}')\right\} = \left\{a_r^\dagger(\overline{P}), b_r^\dagger(\overline{P}')\right\} = \left\{a_r(\overline{P}), b_r^\dagger(\overline{P}')\right\} = \left\{a_r^\dagger(\overline{P}), b_r(\overline{P}')\right\} = 0 \tag{33}$$

e anche

$$\{a_r(\overline{P}), a_r(\overline{P})\} = 2a_r(\overline{P})a_r(\overline{P}) = 0 \quad ; \quad \{a_r^\dagger(\overline{P}), a_r^\dagger(\overline{P})\} = 2a_r^\dagger(\overline{P})a_r^\dagger(\overline{P}) = 0 \tag{34}$$

$$\{a_r(\overline{P}), a_s(\overline{P})\} = \{a_r^\dagger(\overline{P}), a_s^\dagger(\overline{P})\} = \left\{a_r(\overline{P}), a_r(\overline{P}')\right\} = \left\{a_r^\dagger(\overline{P}), a_r^\dagger(\overline{P}')\right\} = 0 \tag{35}$$

Infatti in questo caso la (25) diviene

$$\mathsf{P}_0 = \sum_{P,r} \frac{\hbar\omega_P}{c} \left\{N_r^-(\overline{P}) + N_r^+(\overline{P}) - 2 \cdot \mathbb{1}\right\} \tag{36}$$

Si vede che il valor medio di questa espressione, a parte il termine divergente che prenderemo in considerazione al termine di questo studio, si mantiene positivo:

$$\mathsf{E} = \sum_{P,r} \hbar\omega_P \left\{n_r^-(\overline{P}) + n_r^+(\overline{P})\right\} \tag{37}$$

Ora riprendiamo in considerazione la (28) e moltiplichiamo a sinistra per N_r^- (omettendo per semplicità l'indicazione della dipendenza da $\overline{P}$):

$$(N_r^-)^2|n_r^-\rangle = n_r^- N_r^-|n_r^-\rangle \tag{38}$$

Ma si ha (v. eq. (27) e (32))

$$\begin{aligned}
(N_r^-)^2 &= (a_r^\dagger a_r)^2 \\
&= a_r^\dagger a_r a_r^\dagger a_r \\
&= a_r^\dagger(1 - a_r^\dagger a_r)a_r \\
&= a_r^\dagger a_r - a_r^\dagger a_r^\dagger a_r a_r
\end{aligned}$$

cosicché, tenendo presenti le (34) cioè $a_r^\dagger a_r^\dagger = a_r a_r = 0$, si arriva a $(N_r^-)^2 = a_r^\dagger a_r$ e quindi

$$(N_r^-)^2 = N_r^- \tag{39}$$

Sostituendo nella (38) si ottiene

$$N_r^- |n_r^-\rangle = n_r^- N_r^- |n_r^-\rangle$$

da cui

$$n_r^- = 0, 1 \tag{40}$$

Relazione analoga alla (39) si ottiene per N_r^+:

$$(N_r^+)^2 = N_r^+$$

da cui si ricava, con ragionamento simile a quello che ha prodotto la (40)

$$n_r^+ = 0, 1 \tag{41}$$

Le (40) e (41) mostrano che, una volta introdotte le regole di anticommutazione, gli autovalori di $N_r^\pm$ sono solamente due: 0 e 1. Ciò significa che in ogni stato del sistema può essere allocato al massimo un elettrone. Questa è evidentemente l'enunciazione del Principio di Pauli, che si presenta così come una conseguenza della condizione di positività posta sull'energia del sistema di elettroni.

* * *

La densità di carica-corrente del campo è espressa dalla (33) dello studio (b) e la carica del campo dalla (36) del medesimo studio che qui riscriviamo:

$$Q = |e| \int \overline{\Psi}\gamma^0 \Psi d\overline{\mathcal{R}} = |e| \int \Psi^\dagger \Psi d\overline{\mathcal{R}} \quad ; \quad [Q] = carica\ elettrica \tag{42}$$

Inserendo in questa gli operatori di campo

$$\Psi^\dagger = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{P,r} \sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}} \left\{ b_r(\overline{P}) \mathsf{v}_r^\dagger(\overline{P}) e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + a_r^\dagger(\overline{P}) \mathsf{u}_r^\dagger e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\}$$

ricavato dalla (8) e Ψ fornito dalla stessa (8) otteniamo l'operatore Q espresso in termini degli operatori $b_r(\overline{P}), a_r^\dagger(\overline{P})$ di cui è funzione $\Psi^\dagger$ e $a_r(\overline{P}), b_r^\dagger(\overline{P})$ di cui è funzione Ψ:

$$Q = \frac{|e|}{V} \int \sum_{P,P',r,r'} \frac{c}{2\hbar\omega_P} \left\{ b_r(\overline{P}) \mathsf{v}_r^\dagger(\overline{P}) e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + a_r^\dagger(\overline{P}) \mathsf{u}_r^\dagger e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} \cdot$$
$$\cdot \left\{ a_{r'}(\overline{P}') \mathsf{u}_{r'}(\overline{P}') e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}} + b_{r'}^\dagger(\overline{P}') \mathsf{v}_{r'}(\overline{P}') e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} d\overline{\mathcal{R}}$$

ovvero

$$\begin{aligned} Q = \frac{|e|}{V} \int \sum_{P,P',r,r'} \frac{c}{2\hbar\omega_P} \Big\{ & b_r(\overline{P}) \mathsf{v}_r^\dagger(\overline{P}) a_{r'}(\overline{P}') \mathsf{u}_{r'}(\overline{P}') e^{-\frac{i}{\hbar}(\overline{P}+\overline{P}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} + \\ & + b_r(\overline{P}) \mathsf{v}_r^\dagger(\overline{P}) b_{r'}^\dagger(\overline{P}') \mathsf{v}_{r'}(\overline{P}') e^{-\frac{i}{\hbar}(\overline{P}-\overline{P}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} + \\ & + a_r^\dagger(\overline{P}) \mathsf{u}_r^\dagger(\overline{P}) a_{r'}(\overline{P}') \mathsf{u}_{r'}(\overline{P}') e^{\frac{i}{\hbar}(\overline{P}-\overline{P}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} + \\ & + a_r^\dagger(\overline{P}) \mathsf{u}_r^\dagger(\overline{P}) b_{r'}^\dagger(\overline{P}') \mathsf{v}_{r'}(\overline{P}') e^{\frac{i}{\hbar}(\overline{P}+\overline{P}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} \Big\} d\overline{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

Se ora teniamo conto delle (21) e (22) e delle condizioni di normalizzazione (v. eq. (24)) otteniamo:

$$Q = |e| \sum_{P,r} \left\{ a_r^\dagger(\overline{P}) a_r(\overline{P}) + b_r(\overline{P}) b_r^\dagger(\overline{P}) \right\} \tag{43}$$

da cui, ricordando le relazioni di anticommutazione (32):

$$Q = |e| \sum_{P,r} \left\{ a_r^\dagger(\overline{P}) a_r(\overline{P}) - b_r^\dagger(\overline{P}) b_r(\overline{P}) + 2 \cdot \mathbb{1} \right\} \tag{44}$$

e infine, tenendo conto delle (27), possiamo scrivere

$$Q = |e| \sum_{P,r} \left\{ N_r^-(\overline{P}) - N_r^+(\overline{P}) + 2 \cdot \mathbb{1} \right\} \tag{45}$$

che, trascurando il termine divergente, ha il seguente valor medio:

$$\langle Q \rangle = |e| \langle \Psi | \sum_{P,r} \left\{ N_r^-(\overline{P}) - N_r^+(\overline{P}) \right\} | \Psi \rangle$$

ovvero

$$\langle Q \rangle = |e| \sum_{P,r} (n_r^-(\overline{P}) - n_r^+(\overline{P})) \tag{46}$$

Si vede così che alla condizione di positività posta sull'energia del sistema di elettroni corrispondono due tipi di cariche opposte in segno: sono gli elettroni (talvolta chiamati negatoni) e i positroni (talvolta chiamati positoni) della teoria dell'elettrone di Dirac che ora compaiono "naturalmente" come conseguenza delle relazioni di anticommutazione. Più precisamente occorre dire che la formazione di una coppia positone/negatone viene ora considerata non come conseguenza della transizione di un elettrone da uno stato ad energia negativa a uno stato ad energia positiva, ma come creazione di due particelle aventi energia positiva e dotate una di carica positiva e l'altra di carica negativa.

* * *

Ricordando quanto si è detto nelle pagg. 11 e 12 dello studio (c) si può dare degli operatori (10) e (12) la seguente interpretazione fisica:

$$\mathsf{\Psi}^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{P,r} \sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}} a_r(\overline{P}) \mathsf{u}_r(\overline{P}) e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \quad \textit{distrugge in } \overline{\mathsf{R}} \textit{ un negatone} \tag{47}$$

$$\mathsf{\Psi}^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{P,r} \sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}} b_r^\dagger(\overline{P}) \mathsf{v}_r(\overline{P}) e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \quad \textit{crea in } \overline{\mathsf{R}} \textit{ un positone} \tag{48}$$

$$\overline{\mathsf{\Psi}}^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{P,r} \sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}} b_r(\overline{P}) \overline{\mathsf{v}}_r(\overline{P}) e^{-\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \quad \textit{distrugge in } \overline{\mathsf{R}} \textit{ un positone} \tag{49}$$

$$\overline{\mathsf{\Psi}}^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{P,r} \sqrt{\frac{c}{2\hbar\omega_P}} a_r^\dagger(\overline{P}) \overline{\mathsf{u}}_r(\overline{P}) e^{\frac{i}{\hbar}\overline{\mathsf{P}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \quad \textit{crea in } \overline{\mathsf{R}} \textit{ un negatone} \tag{50}$$

* * *

Nella (45) al termine $2 \cdot \mathbb{1}$ è associato un vuoto dotato di carica elettrica infinita, così come nella (36) è associato un vuoto dotato di energia infinita.
Ciò può essere formalmente evitato mediante un processo di antisimmetrizzazione in cui ad ogni forma covariante bilineare del tipo $\overline{\Psi}_a f(\gamma^{\alpha,ab})\Psi_b$, dove $f(\gamma^{\alpha,ab})$ è un prodotto del tipo di quelli che compaiono nelle (17) dello studio (a), viene sostituita una forma covariante bilineare antisimmetrizzata del tipo seguente:

$$\overline{\Psi}_a f(\gamma^{\alpha,ab})\Psi_b \longrightarrow \frac{1}{2}\Big(\overline{\Psi}_a f(\gamma^{\alpha,ab})\Psi_b - \Psi_b f(\gamma^{\alpha,ab})\overline{\Psi}_a\Big)$$

Questa sostituzione lascia invariate tutte le variabili di campo definite in accordo col Teorema di Nöther, mentre fa sparire i termini che fanno tendere all'infinito i valori di campo del vuoto.
Ad esempio, l'operatore densità di corrente, espresso dalla (33) dello studio (b), diviene:

$$\mathsf{j}^\alpha = \frac{|e|}{2}\left\{\overline{\Psi}_a\gamma^{\alpha,ab}\Psi_b - \Psi_b\gamma^{\alpha,ab}\overline{\Psi}_a\right\} = \frac{|e|}{2}[\overline{\Psi}_a, \gamma^\alpha\Psi_b] \tag{51}$$

mentre la carica diviene

$$Q = \frac{|e|}{2}\int \left(\Psi_a^\dagger\Psi^a - \Psi^a\Psi_a^\dagger\right) d\overline{\mathcal{R}} \tag{52}$$

cosicché la (45) assume l'espressione

$$Q = e\sum_{P,r}\left\{N_r^-(\overline{P}) - N_r^+(\overline{P})\right\} \tag{53}$$

* * *

Per far scomparire i termini divergenti (quelli associati al vuoto) nelle espressioni delle variabili dinamiche, si può procedere anche in un altro modo postulando per le forme covarianti bilineari la prescrizione di *ordinamento normale*, a seguito della quale vengono generati *prodotti normali* di operatori, cioè prodotti in cui gli operatori di distruzione (parte a frequenza positiva) sono tutti a destra degli operatori di creazione (parte a frequenza negativa).
Vediamo in dettaglio di che cosa si tratta.
Gli operatori di campo Ψ e $\overline{\Psi}$, in funzione dei quali sono espresse le forme covarianti bilineari, sono scomponibili, come sappiamo, in una parte a frequenza positiva e in una a frequenza negativa (come mostrano le (5) e (8)) le quali possono essere interpretate come indicato nelle (47), (48), (49) e (50).
Segue da ciò che il prodotto *ordinario* di $\Psi_a(\overline{\mathsf{R}}_1)$ e $\overline{\Psi}_b(\overline{\mathsf{R}}_2)$ è espresso da

$$\begin{aligned}\Psi_a(\overline{\mathsf{R}}_1)\overline{\Psi}_b(\overline{\mathsf{R}}_2) &= \Big(\Psi_a^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}_1) + \Psi_a^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}_1)\Big)\Big(\overline{\Psi}_b^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}_2) + \overline{\Psi}_b^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}_2)\Big) \\ &= \Psi_a^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}_1)\overline{\Psi}_b^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}_2) + \Psi_a^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}_1)\overline{\Psi}_b^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}_2) + \Psi_a^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}_1)\overline{\Psi}_b^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}_2) + \Psi_a^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}_1)\overline{\Psi}_b^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}_2)\end{aligned} \tag{54}$$

Ciò posto, il corrispondente prodotto *normale* per operatori che obbediscono alle regole di anticommutazione (32), (33), (34) e (35) si ottiene dalla (54) lasciando invariati i termini in cui l'operatore di distruzione (+) è a destra di quello di creazione (−) e riscrivendo col segno cambiato, e con fattori invertiti, e senza tener conto delle regole di anticommutazione

(32), i termini in cui l'operatore di distruzione (+) è a sinistra di quello di creazione (−); il simbolo di prodotto normale è il prodotto ordinario preceduto e seguito da due punti:

$$:\Psi_a(\overline{\mathsf{R}}_1)\overline{\Psi}_b(\overline{\mathsf{R}}_2) := \Psi_a^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}_1)\overline{\Psi}_b^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}_2) + \Psi_a^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}_1)\overline{\Psi}_b^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}_2) - \overline{\Psi}_b^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}_2)\Psi_a^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}_1) + \\ + \Psi_a^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}_1)\overline{\Psi}_b^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}_2) \quad (55)$$

Notiamo, per inciso, che occorre cambiare il segno dei termini in cui è stato effettuata l'inversione dei fattori solo negli operatori di campo per i quali valgono regole di anticommutazione; nel caso di operatori soggetti a regole di commutazione non si hanno cambiamenti di segno (v., ad es., lo studio "Quantizzazione del campo scalare hermitiano", pag. 9).

Esempio.

Eseguendo l'operazione di prodotto normale sulla (42), nella quale compaiono operatori di campo anticommutanti, si ottiene l'espressione seguente

$$\begin{aligned} Q &= |e| \int :\overline{\Psi}\gamma^0\Psi : d\overline{\mathcal{R}} \\ &= |e| \sum_{P,r} :\left\{a_r^\dagger(\overline{P})a_r(\overline{P}) + b_r(\overline{P})b_r^\dagger(\overline{P})\right\}: && (56) \\ &= |e| \sum_{P,r} \left\{a_r^\dagger(\overline{P})a_r(\overline{P}) - b_r^\dagger(\overline{P})b_r(\overline{P})\right\} && (57) \end{aligned}$$

e infine

$$Q = e\sum_{P,r}\left\{N_r^-(\overline{P}) - N_r^+(\overline{P})\right\} \quad (58)$$

in cui non compaiono termini che descrivono una carica elettrica del vuoto infinita: ciò è evidentemente dovuto al fatto che, nel passaggio dalla (56) alla (57), non abbiamo fatto ricorso alle regole di anticommutazione (32), ma abbiamo semplicemente applicato alle quantità entro parentesi graffe la prescrizione di prodotto normale.
Ragionamento analogo vale per la densità di 4-corrente del campo di Dirac espressa dalla (32) dello studio (b) che diviene:

$$\bar{\mathsf{i}} = |e| :\overline{\Psi}\overline{\gamma}\Psi : \quad (59)$$