Enrico Borghi

QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO DI MAXWELL

Richiami a studi presenti in “fisicarivisitata”

Leggendo “Quantizzazione del campo di Maxwell” si incontrano richiami ai seguenti studi

(a) Le variabili dinamiche del campo di Maxwell
(b) Il teorema di Nöther
(c) Trasformazioni di gauge e meccanismo di Higgs
(d) Introduzione alla quantizzazione dei campi

che fanno parte di “fisicarivisitata” e che devono essere ben noti a chi si interessa alla quantizzazione del campo di Maxwell seguendo la presentazione che di questo argomento viene data in questo studio.

Riprendiamo in considerazione l'eq. (20) dello studio (a) che qui riscriviamo evidenziando, per maggior chiarezza, la sommatoria su λ

$$\overline{\Phi}(\overline{\mathsf{R}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{c}{2\omega_k}} \left\{ a_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + a^{\dagger}_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) d\overline{k} \quad ; \quad \lambda = 0,1,2,3 \tag{1}$$

essendo $\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}), \lambda = 0,1,2,3$ i versori di base del sistema ortonormale di assi dello spazio pseudoeuclideo

$$\overline{\mathsf{e}}_{(0)} \equiv (1,0,0,0),\ \overline{\mathsf{e}}_{(1)} \equiv (0,1,0,0),\ \overline{\mathsf{e}}_{(2)} \equiv (0,0,1,0),\ \overline{\mathsf{e}}_{(3)} \equiv (0,0,0,1) \tag{2}$$

e

$$\overline{\mathsf{k}} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\omega_k}{c} \\ \pm\overline{k} \end{pmatrix} \quad ; \quad \overline{\mathsf{R}} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \pm\overline{\mathcal{R}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \omega_k = kc \tag{3}$$

Passando alla rappresentazione discreta e introducendo costanti di cui più avanti vedremo l'utilità si ottiene:

$$\overline{\Phi}(\overline{\mathsf{R}}) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}} \left\{ a_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + a^{\dagger}_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \quad ; \quad [\Phi] = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1} \tag{4}$$

Le parti a frequenza positiva e a frequenza negativa della (4) sono espresse rispettivamente da

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}) &= \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}} a_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \\ \overline{\Phi}^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}) &= \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}} a^{\dagger}_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \end{aligned} \tag{5}$$

cosicché

$$\overline{\Phi}(\overline{\mathsf{R}}) = \overline{\Phi}^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}) + \overline{\Phi}^{(-)}(\overline{\mathsf{R}}) \tag{6}$$

In notazione indiciale la (4) diviene:

$$\Phi^{\mu}(\overline{\mathsf{R}}) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}} \left\{ a_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} + a^{\dagger}_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right\} \mathsf{e}^{\mu}_{(\lambda)}(\overline{k}) \tag{7}$$

Ogni componente di $\overline{\Phi}$ viene così ad essere espressa come una combinazione lineare dei versori $\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}$. Definiamo il quadrivettore densità di energia-momento. Tenendo presente la (22) dello studio (a) possiamo scrivere

$$\mathsf{T}^{0}{}_{\lambda} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{\gamma}}{\partial x_0}\frac{\partial \Phi^{\gamma}}{\partial x^{\lambda}} - \delta^{0}{}_{\lambda}\mathsf{L} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{\gamma}}{\partial ct}\frac{\partial \Phi^{\gamma}}{\partial x^{\lambda}} + \delta^{0}{}_{\lambda}\frac{1}{2c}\frac{\partial \Phi_{\mu}}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial \Phi^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \tag{8}$$

Si ottiene così la densità di energia ($k = 1, 2, 3$; $\gamma, \mu = 0, 1, 2, 3$)

$$\mathsf{T}^0{}_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial ct}\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial ct} + \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial ct}\frac{\partial\Phi^\mu}{\partial ct} + \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi^\mu}{\partial x^k}\right) = -\frac{1}{2c}\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial ct}\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial ct} + \frac{1}{2c}\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi^\mu}{\partial x^k} \tag{9}$$

Notiamo che

$$\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi^\mu}{\partial x^k} = (\partial^k\Phi_\mu)(\partial_k\Phi^\mu) = (\partial^k\Phi^\nu g_{\mu\nu})(\partial_k\Phi^\mu) = (\partial^k\Phi^\nu)(\partial_k\Phi^\mu g_{\mu\nu}) = (\partial^k\Phi^\nu)(\partial_k\Phi_\nu)$$

cosicché passando dalle notazioni indiciali $\partial^k, k = 1, 2, 3$ e $\partial_k, k = 1, 2, 3$ alle rispettive notazioni simboliche $-\nabla$ e $+\nabla$ si ha

$$\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi^\mu}{\partial x^k} = (-\nabla\overline{\Phi}) : (\nabla\overline{\Phi}) \tag{10}$$

e quindi

$$\mathsf{T}^0{}_0 = -\frac{1}{2c}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial ct}\cdot\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial ct} + \frac{1}{2c}(-\nabla\overline{\Phi}) : (\nabla\overline{\Phi}) \tag{11}$$

Esplicitiamo $\mathsf{T}^0{}_0$. Essendo $\pm i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}} = \pm i\mathsf{k}_0 ct \mp i\overline{k}\cdot\overline{\mathcal{R}}$ si ha dalla (4)

$$\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial ct} = -\sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{k,\lambda}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}\,i\mathsf{k}_0\Big(a_{(\lambda)}e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} - a^\dagger_{(\lambda)}e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\Big)\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \tag{12}$$

$$\nabla\overline{\Phi} = \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{k,\lambda}\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}}\,i\overline{k}\Big(a_{(\lambda)}e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} - a^\dagger_{(\lambda)}e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}\Big)\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \tag{13}$$

Poiché risulta

$$\big(-i\mathsf{k}_0\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k})\big)\cdot\big(-i\mathsf{k}'_0\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}')\big) = -\frac{\omega_k\omega_{k'}}{c^2}\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k})\cdot\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}') \tag{14}$$

e anche, essendo $(\overline{a}\overline{b}) : (\overline{a}\overline{b}) = (\overline{a}\cdot\overline{a})(\overline{b}\cdot\overline{b})$,

$$\big(i\overline{k}\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k})\big) : \big(i\overline{k}'\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}')\big) = -\big(\overline{k}\cdot\overline{k}'\big)\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k})\cdot\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}'), \tag{15}$$

i termini a membro destro della (11) sono espressi da

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2c}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial ct}\cdot\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial ct} &= \frac{-1}{2cV}\sum_{k,k',\lambda,\lambda'}\frac{\hbar c^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\Big(\cdots\Big)\Big(\cdots\Big)'\Big(-\frac{\omega_k\omega_{k'}}{c^2}\Big)\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k})\cdot\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}') \\ &= \frac{\hbar c}{4V}\sum_{k,k',\lambda,\lambda'}\frac{\frac{\omega_k\omega_{k'}}{c^2}}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\Big(\cdots\Big)\Big(\cdots\Big)'\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k})\cdot\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}')\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2c}(-\nabla\overline{\Phi}) : (\nabla\overline{\Phi}) &= -\frac{1}{2cV}\sum_{k,k',\lambda,\lambda'}\frac{\hbar c^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\Big(\cdots\Big)\Big(\cdots\Big)'(-\overline{k}\cdot\overline{k}')\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k})\cdot\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}') \\ &= \frac{\hbar c}{4V}\sum_{k,k',\lambda,\lambda'}\frac{\overline{k}\cdot\overline{k}'}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\Big(\cdots\Big)\Big(\cdots\Big)'\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k})\cdot\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}')\end{aligned} \tag{17}$$

e quindi dalla (11) si ottiene la seguente espressione della componente P_0 del 4-vettore energia-momento (v. l'eq. (26) dello studio (b)):

$$\mathsf{P}_0 = \int \mathsf{T}^0{}_0 d\overline{\mathcal{R}} = \frac{\hbar c}{4V} \int \sum_{k,k',\lambda,\lambda'} \frac{\frac{\omega_k \omega_{k'}}{c^2} + \overline{k}\cdot\overline{k}'}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left(a_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} - a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right)$$
$$\left(a_{(\lambda')}(\overline{k}') e^{-i\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}} - a^\dagger_{(\lambda')}(\overline{k}') e^{i\overline{\mathsf{k}}'\cdot\overline{\mathsf{R}}} \right) \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \cdot \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}') d\overline{\mathcal{R}} \quad (18)$$

da cui

$$\mathsf{P}_0 = \frac{\hbar c}{4V} \int \sum_{k,k',\lambda,\lambda'} \frac{\frac{\omega_k \omega_{k'}}{c^2} + \overline{k}\cdot\overline{k}'}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \Big\{ a_{(\lambda)}(\overline{k}) a_{(\lambda')}(\overline{k}') e^{-i(\overline{\mathsf{k}}+\overline{\mathsf{k}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} +$$
$$- a_{(\lambda)}(\overline{k}) a^\dagger_{\lambda')}(\overline{k}') e^{-i(\overline{\mathsf{k}}-\overline{\mathsf{k}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} - a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) a_{(\lambda')}(\overline{k}') e^{i(\overline{\mathsf{k}}-\overline{\mathsf{k}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} +$$
$$+ a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) a^\dagger_{(\lambda')}(\overline{k}') e^{i(\overline{\mathsf{k}}+\overline{\mathsf{k}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} \Big\} \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \cdot \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}') d\overline{\mathcal{R}} \quad (19)$$

Ricordando che

$$\frac{1}{V} \int e^{\pm i(\overline{\mathsf{k}}-\overline{\mathsf{k}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} d\overline{\mathcal{R}} = e^{\pm i(\omega_k - \omega_{k'})t} \delta_{kk'} \quad ; \quad \frac{1}{V} \int e^{\pm i(\overline{\mathsf{k}}+\overline{\mathsf{k}}')\cdot\overline{\mathsf{R}}} d\overline{\mathcal{R}} = e^{\pm i(\omega_k + \omega_{k'})t} \delta_{k(-k')} \quad (20)$$

si ottiene

$$\mathsf{P}_0 = \frac{\hbar c}{4} \sum_{k,\lambda,\lambda'} \left\{ \frac{\frac{\omega_k^2}{c^2} - \overline{k}^2}{\omega_k} a_{(\lambda)}(\overline{k}) a_{(\lambda')}(-\overline{k}) \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \cdot \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(-\overline{k}) + \right.$$
$$- \frac{\frac{\omega_k^2}{c^2} + \overline{k}^2}{\omega_k} a_{(\lambda)}(\overline{k}) a^\dagger_{(\lambda')}(\overline{k}) \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \cdot \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}) - \frac{\frac{\omega_k^2}{c^2} + \overline{k}^2}{\omega_k} a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) a_{(\lambda')}(\overline{k}) \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \cdot \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}) +$$
$$\left. + \frac{\frac{\omega_k^2}{c^2} - \overline{k}^2}{\omega_k} a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) a^\dagger_{(\lambda')}(-\overline{k}) \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \cdot \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(-\overline{k}) \right\} \quad (21)$$

Tenendo presente che $\overline{k}^2 = \omega_k^2/c^2$ segue

$$\mathsf{P}_0 = -\frac{\hbar c}{4} \sum_{k,\lambda,\lambda'} \frac{2\frac{\omega_k^2}{c^2}}{\omega_k} \left\{ a_{(\lambda)}(\overline{k}) a^\dagger_{(\lambda')}(\overline{k}) + a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) a_{(\lambda')}(\overline{k}) \right\} \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \cdot \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}) \quad (22)$$

ovvero, per la relazione di ortogonalità $\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}(\overline{k}) \cdot \overline{\mathsf{e}}_{(\lambda')}(\overline{k}) = g_{\lambda\lambda'}$ (v. l'eq. (B13) dell'Appendice B dello studio (a))

$$\mathsf{P}_0 = -\frac{1}{2} \sum_{k,\lambda,\lambda'} \frac{\hbar \omega_k}{c} \left\{ a_{(\lambda)}(\overline{k}) a^\dagger_{(\lambda')}(\overline{k}) + a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) a_{(\lambda')}(\overline{k}) \right\} g_{\lambda\lambda'} \quad (23)$$

da cui

$$\mathsf{P}_0 = -\sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2c}\left\{a_{(0)}(\overline{k})a^\dagger_{(0)}(\overline{k}) + a^\dagger_{(0)}(\overline{k})a_{(0)}(\overline{k}) - \sum_{\lambda=1}^{3}\Big(a_{(\lambda)}(\overline{k})a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) + a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})a_{(\lambda)}(\overline{k})\Big)\right\} \tag{24}$$

o anche:

$$\mathsf{P}_0 = \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2c}\left\{\sum_{\lambda=1}^{3}\Big(a_{(\lambda)}(\overline{k})a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) + a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})a_{(\lambda)}(\overline{k})\Big) - a_{(0)}(\overline{k})a^\dagger_{(0)}(\overline{k}) - a^\dagger_{(0)}(\overline{k})a_{(0)}(\overline{k})\right\} \tag{25}$$

Notiamo che finora non abbiamo introdotto nessun procedimento di quantizzazione del campo $\overline{\Phi}$, che è stato considerato come una coordinata lagrangiana di campo ottenuta risolvendo una equazione d'onda classica e normalizzando in una scatola (anche se i prodotti di $a_{(\lambda)}(\overline{k})$ e $a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})$ sono stati trattati avendo in mente che diventeranno prodotti di operatori).

Assumiamo ora, in accordo con il punto 5. dello studio (d), che $\overline{\Phi}$ sia un operatore espresso in funzione degli operatori $a_{(\lambda)}(\overline{k})$ e $a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})$ cosicché la (25) diviene un'equazione operatoriale che descrive l'operatore energia P_0 in termini degli operatori $a_{(\lambda)}(\overline{k})$ e $a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})$.

Si può mostrare che $a_{(\lambda)}(\overline{k})$ e $a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})$ soddisfano relazioni analoghe alle (38) e (39) dello studio (d) cosicché possono essere identificati rispettivamente come operatore di distruzione e operatore di creazione. Valgono anche relazioni analoghe alle (45) e (46) dello studio (d):

$$[a_{(\lambda)}(\overline{k}), a^\dagger_{(\lambda')}(\overline{k}')] = -g_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'} \tag{26}$$

e anche

$$[a_{(\lambda)}(\overline{k}), a_{(\lambda)}(\overline{k}')] = [a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}), a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}')] = 0 \tag{27}$$

$$[a_{(\lambda)}(\overline{k}), a_{(\lambda')}(\overline{k})] = [a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}), a^\dagger_{(\lambda')}(\overline{k})] = 0 \tag{28}$$

L'operatore numero di occupazione è espresso da:

$$N_\lambda(\overline{k}) = a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})a_{(\lambda)}(\overline{k}) \tag{29}$$

e lo stato del vuoto è rappresentato dal vettore $|\Psi_0\rangle$ tale che

$$a(\overline{k})|\Psi_0\rangle = 0$$

o anche

$$\overline{\Phi}^{(-)}(\overline{\mathsf{R}})|\Psi_0\rangle = 0 \quad ; \quad \langle\Psi_0|\overline{\Phi}^{(+)}(\overline{\mathsf{R}}) = 0 \tag{30}$$

Tenendo conto della (26), che per $\lambda' = \lambda$ e $\overline{k}' = \overline{k}$ diviene

$$a_{(\lambda)}(\overline{k})a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) = -g_{\lambda\lambda}\mathbb{1} + a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})a_{(\lambda)}(\overline{k}), \tag{31}$$

si può scrivere la (25) nel modo seguente:

$$\mathsf{P}_0 = \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2c}\left\{\sum_{\lambda=1}^{3}\Big(\mathbb{1} + 2a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})a_{(\lambda)}(\overline{k})\Big) + \mathbb{1} - 2a^\dagger_{(0)}(\overline{k})a_{(0)}(\overline{k})\right\}$$

ovvero

$$\mathsf{P}_0 = \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{c} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{3} a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) a_{(\lambda)}(\overline{k}) - a^\dagger_{(0)}(\overline{k}) a_{(0)}(\overline{k}) + \mathbb{1} \right\}$$

da cui, per la (29)

$$\mathsf{P}_0 = \sum_{k;\lambda=1,2,3} \frac{\hbar\omega_k}{c} \big(N_\lambda(\overline{k}) - N_0(\overline{k}) + \mathbb{1} \big)$$

Il valor medio di P_0, trascurando il termine divergente, è espresso da

$$\frac{\mathsf{E}}{c} = \langle \mathsf{P}_0 \rangle = \langle \Psi | \sum_{k;\lambda=1,2,3} \frac{\hbar\omega_k}{c} \big(N_\lambda(\overline{k}) - N_0(\overline{k}) \big) | \Psi \rangle$$

da cui

$$\mathsf{E} = \sum_{k;\lambda=1,2,3} \hbar\omega_k (n_{k;\lambda} - n_{k;0})$$

dove le quantità $n_{k;\lambda}$ sono gli autovalori di $N_\lambda(\overline{k})$.
Dunque la E non è definita positiva, così come non lo è la (9).

Riscrivendo la (25) così

$$\mathsf{P}_0 = \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2c} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{2} \Big(a_{(\lambda)}(\overline{k}) a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) + a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k}) a_{(\lambda)}(\overline{k}) \Big) + \right.$$
$$\left. - \Big(a_{(0)}(\overline{k}) a^\dagger_{(0)}(\overline{k}) + a^\dagger_{(0)}(\overline{k}) a_{(0)}(\overline{k}) \Big) + \Big(a_{(3)}(\overline{k}) a^\dagger_{(3)}(\overline{k}) + a^\dagger_{(3)}(\overline{k}) a_{(3)}(\overline{k}) \Big) \right\} \qquad (32)$$

viene messo in evidenza il fatto che a P_0 danno contributo, oltre che i fotoni trasversali ($\lambda = 1, 2$), anche quelli scalari ($\lambda = 0$) e longitudinali ($\lambda = 3$), mentre sappiamo che in realtà solo quelli trasversali devono essere coinvolti nel calcolo.
Ora però occorre tener presente che fino a questo punto non si è fatto uso della condizione di Lorentz (v. la pag. 11 dello studio (c))

$$\square \cdot \overline{\Phi} = 0 \qquad (33)$$

che, come sappiamo, esprime nell'elettromagnetismo classico la condizione di trasversalità delle onde elettromagnetiche e che ora dovrebbe diventare una relazione quantistica.
Tuttavia, come si può mostrare, la (33) non può essere convertita in relazione operatoriale perché quest'ultima entrerebbe in conflitto con le relazioni di commutazione degli operatori di campo maxwelliano (v. eq. (26)).
Una soluzione di questo problema è stata avanzata da S. Gupta e K. Bleuler (1950) che hanno proposto, servendosi del Principio di Corrispondenza, la seguente relazione

$$\langle \Psi | \square \cdot \overline{\Phi} | \Psi \rangle = 0 \qquad (34)$$

che, ricordando l'eq. (6), può essere scritta così

$$\langle \Psi | \square \cdot \overline{\Phi} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \square \cdot \overline{\Phi}^{(+)} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \square \cdot \overline{\Phi}^{(-)} | \Psi \rangle = 0$$

ovvero, essendo $\square \cdot \overline{\Phi}^{(-)} = \left(\square \cdot \overline{\Phi}^{(+)}\right)^{\dagger}$,

$$\langle\Psi|\square \cdot \overline{\Phi}|\Psi\rangle = \langle\Psi|\square \cdot \overline{\Phi}^{(+)}|\Psi\rangle + \langle\Psi|\left(\square \cdot \overline{\Phi}^{(+)}\right)^{\dagger}|\Psi\rangle = 0 \tag{35}$$

Ora osserviamo che se imponiamo

$$(\square \cdot \overline{\Phi}^{(+)})|\Psi\rangle = 0 \tag{36}$$

assumiamo implicitamente anche la relazione

$$\langle\Psi|\left(\square \cdot \overline{\Phi}^{(+)}\right)^{\dagger} = 0 \tag{37}$$

e si vede così che, in conseguenza della (35), imporre la condizione (36) equivale ad imporre la (34).

In alternativa alla (36) si può assumere

$$(\square \cdot \overline{\Phi}^{(-)})|\Psi\rangle = 0 \tag{38}$$

e implicitamente $\langle\Psi|\left(\square \cdot \overline{\Phi}^{(-)}\right)^{\dagger} = 0$. Infatti, essendo

$$\square \cdot \overline{\Phi}^{(+)} = \left(\square \cdot \overline{\Phi}^{(-)}\right)^{\dagger}$$

si può scrivere

$$\langle\Psi|\square \cdot \overline{\Phi}|\Psi\rangle = \langle\Psi|\square \cdot \overline{\Phi}^{(+)}|\Psi\rangle + \langle\Psi|\square \cdot \overline{\Phi}^{(-)}|\Psi\rangle = \langle\Psi|(\square \cdot \overline{\Phi}^{(-)})^{\dagger}|\Psi\rangle + \langle\Psi|\square \cdot \overline{\Phi}^{(-)}|\Psi\rangle$$

e si vede così che imporre la condizione (38) equivale a imporre la (34).

Ciò posto, imponiamo la (36) che, tenendo presente la (5) e ricordando che $\pm i\overline{\mathsf{k}} \cdot \overline{\mathsf{R}} = \pm i(\mathsf{k}_0 ct - \overline{k} \cdot \overline{\mathcal{R}})$, fornisce ($l = 1, 2, 3$)

$$\left(\frac{\partial \Phi^{(+)^0}}{\partial ct} + \frac{\partial \Phi^{(+)^l}}{\partial x^l}\right)|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{V}} c \sum_{k,\lambda} \frac{-i}{\sqrt{2\omega_k}} \left\{\mathsf{k}_0 \mathsf{e}^0_{(\lambda)}(\overline{k}) - \overline{k} \cdot \overline{e}_{(\lambda)}(\overline{k})\right\} a_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{-i\overline{\mathsf{k}} \cdot \overline{\mathsf{R}}}|\Psi\rangle = 0$$

ovvero

$$\sum_{k,\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left\{\mathsf{k}_0 \mathsf{e}^0_{(\lambda)}(\overline{k}) - \overline{k} \cdot \overline{e}_{(\lambda)}(\overline{k})\right\} a_{(\lambda)}(\overline{k}) e^{-i\overline{\mathsf{k}} \cdot \overline{\mathsf{R}}}|\Psi\rangle = 0 \tag{39}$$

Consideriamo ora un'onda caratterizzata dal quadrivettore

$$\overline{\mathsf{k}} \equiv \mathsf{k}_0, 0, 0, \mathsf{k}_3 = \frac{\omega}{c}, 0, 0, k$$

che si muova lungo la direzione

$$\overline{k} \equiv 0, 0, \mathsf{k}_3 = 0, 0, k \tag{40}$$

che assumiamo coincidente con $\mathsf{e}_{(3)}$. Allora $\mathsf{e}_{(1)}$ e $\mathsf{e}_{(2)}$, normali a $\overline{k}$, sono detti *versori di polarizzazione trasversa*; $\mathsf{e}_{(3)}$ è detto *versore di polarizzazione longitudinale* ed $\mathsf{e}_{(0)}$ è detto *versore di polarizzazione scalare.*
Si ha allora (v. eq. (2) e (40))

$$\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}=\mathsf{k}_0\mathsf{e}^0_{(\lambda)}-\overline{k}\cdot\overline{e}_{(\lambda)}=\begin{cases}\mathsf{k}_0\mathsf{e}^0_{(0)}-\overline{k}\cdot\overline{e}_{(0)}=\mathsf{k}_0\cdot 1-(0\cdot 0+0\cdot 0+k\cdot 0)=+\mathsf{k}_0=\omega/c\\ \mathsf{k}_0\mathsf{e}^0_{(1)}-\overline{k}\cdot\overline{e}_{(1)}=\mathsf{k}_0\cdot 0-(0\cdot 1+0\cdot 0+k\cdot 0)=0\\ \mathsf{k}_0\mathsf{e}^0_{(2)}-\overline{k}\cdot\overline{e}_{(2)}=\mathsf{k}_0\cdot 0-(0\cdot 0+0\cdot 1+k\cdot 0)=0\\ \mathsf{k}_0\mathsf{e}^0_{(3)}-\overline{k}\cdot\overline{e}_{(3)}=\mathsf{k}_0\cdot 0-(0\cdot 0+0\cdot 0+k\cdot 1)=-k=-\omega/c\end{cases}$$

dove si è fatto riferimento alle notazioni

$$\overline{\mathsf{k}}=\begin{pmatrix}\mathsf{k}_0\\ \pm\overline{k}\end{pmatrix}\quad;\quad\overline{\mathsf{e}}_{(\lambda)}\equiv\begin{pmatrix}\mathsf{e}^0_{(\lambda)}\\ \pm\overline{e}_{(\lambda)}\end{pmatrix}\tag{41}$$

Dunque la (39) diviene

$$\sum_k\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\Big(\mathsf{k}_0a_{(0)}(\overline{k})-ka_{(3)}(\overline{k})\Big)e^{-i\overline{\mathsf{k}}\cdot\overline{\mathsf{R}}}|\Psi\rangle=0\quad;\quad\mathsf{k}_0=k=\frac{\omega_k}{c}$$

da cui

$$\Big(a_{(0)}(\overline{k})-a_{(3)}(\overline{k})\Big)|\Psi\rangle=0\tag{42}$$

e con analogo sviluppo si ottiene dalla (37)

$$\langle\Psi|\Big(a^\dagger_{(0)}(\overline{k})-a^\dagger_{(3)}(\overline{k})\Big)=0\tag{43}$$

Dalle (42) e (43) si ricava

$$a_{(0)}=a_{(3)}\quad;\quad a^\dagger_{(0)}=a^\dagger_{(3)}\tag{44}$$

cosicché la (32) diviene

$$\mathsf{P}_0=\sum_k\frac{\hbar\omega_k}{2c}\sum_{\lambda=1}^{2}\Big(a_{(\lambda)}(\overline{k})a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})+a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})a_{(\lambda)}(\overline{k})\Big)\tag{45}$$

Si vede così che le condizioni (36) o (37) rendono ammissibili solo gli stati per cui il numero dei fotoni scalari è uguale a quello dei fotoni longitudinali. Poiché il contributo dei fotoni scalari è negativo, sommandolo con quello dei fotoni longitudinali si ottiene zero.
Notiamo che la somma è zero, non ciascun contributo.
Il valor medio della (45) vale

$$\begin{aligned}\langle\mathsf{P}_0\rangle&=\sum_{k;\lambda=1,2}\frac{\hbar\omega_k}{2c}\langle\Psi|\Big(a_{(\lambda)}(\overline{k})a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})+a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})a_{(\lambda)}(\overline{k})\Big)|\Psi\rangle\\&=\sum_{k;\lambda=1,2}\frac{\hbar\omega_k}{2c}\langle\Psi|\Big(a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})a_{(\lambda)}(\overline{k})+\mathbb{1}+a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})a_{(\lambda)}(\overline{k})\Big)|\Psi\rangle\\&=\sum_{k;\lambda=1,2}\frac{\hbar\omega_k}{2c}\langle\Psi|\Big(2a^\dagger_{(\lambda)}(\overline{k})a_{(\lambda)}(\overline{k})+\mathbb{1}\Big)|\Psi\rangle\end{aligned}\tag{46}$$

da cui, tenendo conto della (29):

$$\frac{\mathsf{E}}{c} = \langle \mathsf{P}_0 \rangle = \sum_{k;\lambda=1,2} \frac{\hbar\omega_k}{c} \langle \Psi | (N_{(\lambda)}(\overline{k}) + \tfrac{1}{2}\mathbb{1}) | \Psi \rangle$$

e infine

$$\mathsf{E} = \sum_{k;\lambda=1,2} \hbar\omega_k (n_{k,\lambda} + \tfrac{1}{2}) \tag{47}$$

Abbiamo così ottenuto un'espressione dell'energia che non può essere altro che positiva.